

# Ordenaciones estocásticas aplicadas al riesgo y la fiabilidad.

Alfonso Suárez Llorens, Antonia Castaño Martínez, Miguel Ángel Sordo Diaz

Facultad de Ciencias  
Departamento de Estadística e Investigación Operativa  
Universidad de Cádiz (Spain)

Jornada de Presentación de Líneas de Investigación  
Grado en Matemáticas  
23 junio 2022

## ¿Por qué ordenaciones estocásticas?

Uno de los principales objetivos de la estadística es la comparación de cantidades aleatorias. Estas comparaciones se basan principalmente en la comparación de algunas medidas asociadas a estas cantidades aleatorias. Por ejemplo, comparamos variables en términos de sus valores medios, medianas, varianzas, etc. Las comparaciones basadas sólo en dos cantidades individuales no son muy informativas.

## ¿Órdenes estocásticos?

La necesidad de matizar la comparación entre dos fenómenos aleatorios es el origen de las ordenaciones estocásticas (Hardy y Littlewood, Inequalities). El número de publicaciones ha aumentado considerablemente durante los últimos 40 años (Shaked y Shanthikumar (2007), Stochastic Orders).

## Resumiendo:

De manera formal, la Teoría de los Órdenes Estocásticos se ocupa de la comparación de dos comportamientos aleatorios. El tipo de comparación depende de lo que estemos buscando: riesgo, biodiversidad, fiabilidad, desigualdad, dispersión, eficiencia, etc.

## En general

Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias. Denotamos:

$$X \leq_* Y$$

donde el comportamiento de  $\leq_*$  depende de lo que queramos comparar.

Principalmente:

- Compaciones en Magnitud, por ejemplo  $X \leq_{st} Y$  cuando  $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- Compaciones en Variabilidad, por ejemplo  $X \leq_{disp} Y$  cuando  $F_X^{-1}(p) - F_X^{-1}(q) \leq F_Y^{-1}(p) - F_Y^{-1}(q)$  para todo  $0 < p < q < 1$ .

## Proyectos

- Ordenaciones estocásticas: estudio del concepto de desigualdad económica desde una perspectiva unidimensional y multidimensional. Plan Nacional de I+D en CCSS, Jurídicas y Económicas. Referencia SEJ 2005-06678-ECON.
- Modelos estocásticos aplicados al análisis del riesgo actuarial y a la medida de la pobreza. Plan de Excelencia Andaluz de Investigación. Referencia P09-SEJ-4739.
- El concepto de dispersión aplicado a la ingeniería y a la economía. Plan Nacional de I+D en Ciencias Matemáticas. Referencia MTM2009-08326.
- Modelos para la variabilidad y la administración del riesgo. Plan Nacional de I+D Excelencia en Ciencias Matemáticas. Referencia MTM2014-57559-P.
- Ordenaciones estocásticas aplicadas a los seguros, las finanzas y la fiabilidad de Sistemas. Plan Nacional I+D Excelencia. Programa Estatal de I+D Excelencia en Ciencias Matemáticas. Referencia MTM2017-89577-P.
- Modelos Probabilísticos para la medición y comparación del riesgo sistémico. FEDER Andalucía 2014-2020. Referencia: FEDER-UCA18-107519.
- Ordenaciones estocásticas de riesgos multivariantes y sistemas coherentes: modelos y aplicaciones. Referencia: PID2020-116216GB-I00.

## Transferencia

Empresa de base tecnológica **Orbistat**: <https://www.orbistat.com/>.

## Grandes números -últimos 10 años-

Tesis doctorales	Artículos	Proyectos	Becarios FPU
7 (+1 en curso)	>60	7	2 (+1 vacante)

**Table:** Producción línea de investigación UCA.

## MIEMBROS

Apellidos	Nombre	Institución	Email	SEIO	ID Scopus
Arriaza Gómez	Antonio	Univ. Cádiz	antoniojesus.arriaza@uca.es	Si	57053335200
Badía Blasco	F.º Germán	Univ. Zaragoza	gbadia@unizar.es	Si	6701824343
Bello Espina	Alfonso	Univ. Cádiz	alfonsojose.bello@uca.es	Si	56480106000
Belzunce Torregrosa	Félix	Univ. Murcia	belzunce@um.es	Si	56209400800
<u>Berrendero</u>	<u>José Ramón</u>	Univ. Autónoma Madrid	joser.berrendero@uam.es	Si	6603349623
Cárcamo	Javier	Univ. Autónoma Madrid	javier.carcamo@uam.es	Si	7003350474
Castaña Martínez	Antonia	Univ. Cádiz	antonia.castano@uca.es	Si	56114640500
del Águila del Águila	Yolanda	Univ. Almería	yaguila@ual.es	Si	6507882850
Franco Pereira	Alba	Univ. C. Madrid	albfranc@ucm.es	Si	37664732200
López Blázquez	Fernando	Univ. Sevilla	lopez@us.es	Si	6603730623
Lillo Rodríguez	Rosa	Univ. Carlos III	lillo@est-econ.uc3m.es	Si	35320176800
Mulero González	Julio	Univ. Alicante	julio.mulero@ua.es	Si	35183686600
<u>Navarro Camacho</u>	<u>Jorge</u>	Univ. Murcia	jorgenav@um.es	Si	55684418400
Pigueira Voces	Gema	Univ. Cádiz	gema.pigueiras@uca.es	Si	57190967051
Ramos González	Carmen D.	Univ. Cádiz	carmen.ramos@uca.es	Si	39062029500
Ramos Romero	Héctor	Univ. Cádiz	hector.ramos@uca.es	Si	7006910739
Ruiz Gómez	José María	Univ. Murcia	jmruizgo@um.es	Si	35615138600
Sánchez Sánchez	Marta	Univ. Cádiz	marta.sanchez@uca.es	Si	57213639463
Sangüensa Lafuente	Carmen	Univ. Zaragoza	csangues@unizar.es	Si	6602101917
Sordo Díaz	M. Ángel	Univ. Cádiz	mangel.sordo@uca.es	Si	6602696817
Suárez Llorens	Alfonso	Univ. Cádiz	alfonso.suarez@uca.es	Si	<u>56312995200</u>
Torrado	Nuria	Univ. Autónoma Madrid	nuria.torrado@uam.es	Si	35208993300

## Algunas áreas donde se emplea la Teoría de Ordenes Estocásticos es:

- **Finanzas:**

- Para comparar desigualdad de dos distribuciones de renta.
- Para evaluar el nivel de riesgo de dos carteras de inversión.
- Para comparar o estudiar la consistencia de medidas de riesgo.

- **Ciencias Actuariales:**

- Para comparar qué modelo es más arriesgado.
- Para construir medidas de riesgo y establecer principios de primas.

- **Fiabilidad:**

- Para comparar, en fiabilidad, dos sistemas de ingeniería.

## Sistemas coherentes

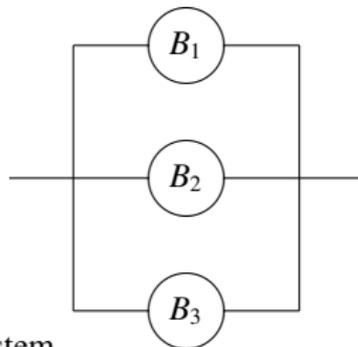
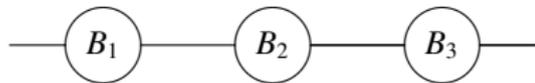
- Consideramos un dispositivo electrónico con  $n$  componentes.
- $T$  y  $\bar{F}_T(t)$  representan el tiempo de vida y la función de supervivencia del sistema, respectivamente.
- $X_i$  y  $\bar{F}_{X_i}(t)$  representan el tiempo de vida y la función de supervivencia del componente  $i$ -ésimo, respectivamente, para  $i = 1, \dots, n$ .
- El tiempo de vida del sistema es una función que depende de los tiempos de vida de los componentes:

$$T =_{st} T(X_1, \dots, X_n).$$

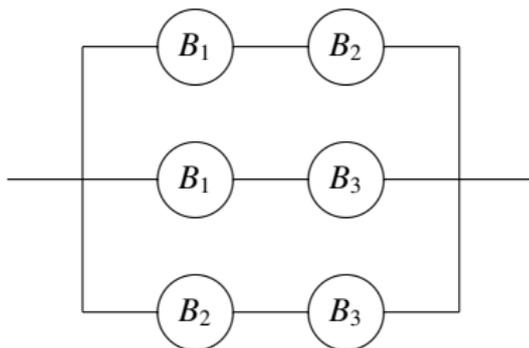
- ¿Se puede comparar dos sistemas diferentes? ¿ $T_1$  comparado con  $T_2$ ?

Parallel system (1-out-of-3)

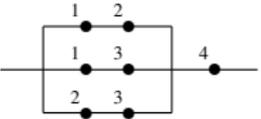
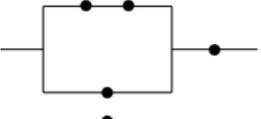
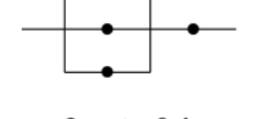
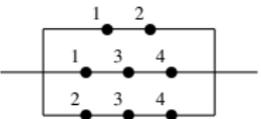
Series system (3-out-of-3)

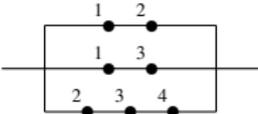
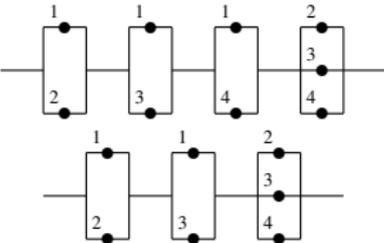


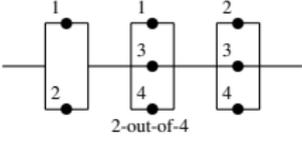
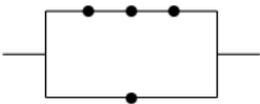
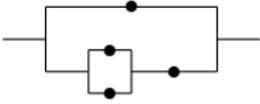
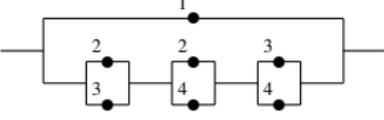
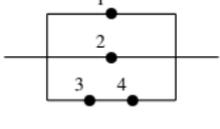
2-out-of-3 system



# Con cuatro bombillas hay muchas opciones...

System	$\tau(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$	Signature
<p><b>Series</b></p> <p><b>Consecutive 3-out-of-4</b></p>    <p><b>3-out-of-4</b></p> 	$\min\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = Z_{(1:4)} = \tau_{4:4}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ $\max\{\min\{Z_1, Z_2, Z_3\}, \min\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}$ $\min\{\tau_{2:3}(Z_1, Z_2, Z_3), Z_4\}$ $\min\{\max\{Z_1, Z_2\}, \max\{Z_1, Z_3\}, Z_4\}$ $\min\{\max\{Z_1, Z_2, Z_3\}, Z_4\}$ $Z_{(2:4)} = \tau_{3:4}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ $\max\{\min\{Z_1, Z_2\}, \min\{Z_1, Z_3, Z_4\}, \min\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}$	$(1, 0, 0, 0)$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$ $(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ $(0, 1, 0, 0)$ $(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$

System	$\tau(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$	Signature
	$\max\{\min\{Z_1, Z_2\}, \min\{Z_3, Z_4\}\}$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
	$\max\{\min\{Z_1, Z_2\}, \min\{Z_1, Z_3\}, \min\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
<p data-bbox="179 495 470 521"><b>Consecutive 2-out-of-4</b></p> 	$\max\{\min\{Z_1, Z_2\}, \min\{Z_2, Z_3\}, \min\{Z_3, Z_4\}\}$  $\max\{\min\{Z_1, \max\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}, \min\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}$  $\max\{\min\{Z_1, \max\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}, \min\{Z_2, Z_3\}\}$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

System	$\tau(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$	Signature
	$\min\{\max\{Z_1, Z_2\}, \max\{Z_3, Z_4\}\}$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
 <p style="text-align: center;">2-out-of-4</p>	$\min\{\max\{Z_1, Z_2\}, \max\{Z_1, Z_3, Z_4\}, \max\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}$ $Z_{(3;4)} = \tau_{2;4}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$ $(0, 0, 1, 0)$
	$\max\{Z_1, \min\{Z_2, Z_3, Z_4\}\}$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
	$\max\{Z_1, \min\{Z_2, Z_4\}, \min\{Z_3, Z_4\}\}$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$
	$\max\{\tau_{2;3}(Z_1, Z_2, Z_3), Z_4\}$	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
	$\max\{Z_1, Z_2, \min\{Z_3, Z_4\}\}$	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
<p style="text-align: center;"><b>Parallel</b></p>	$\max\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = Z_{(4;4)} = \tau_{1;4}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$	$(0, 0, 0, 1)$

## Otras líneas de investigación

- Teoría de cópulas: Estudio de la dependencia de vectores y extensiones de resultados con variables i.i.d.
- Medidas de riesgo.
- Inferencia Bayesiana.
- Distancias entre variables aleatorias y estudio de estas distancias con restricciones (por ejemplo, con estructura de dependencia prefijada).

- Alfonso Suárez Llorens (alfonso.suarez@uca.es)
- Antonia Castaño Martínez (antonia.castano@uca.es)
- Miguel Ángel Sordo Díaz (mangel.sordo@uca.es)
- Antonio Arriaza Gómez (antoniojesus.arriaza@uca.es)
- Patricia Ortega Jiménez (patricia.ortega@uca.es)