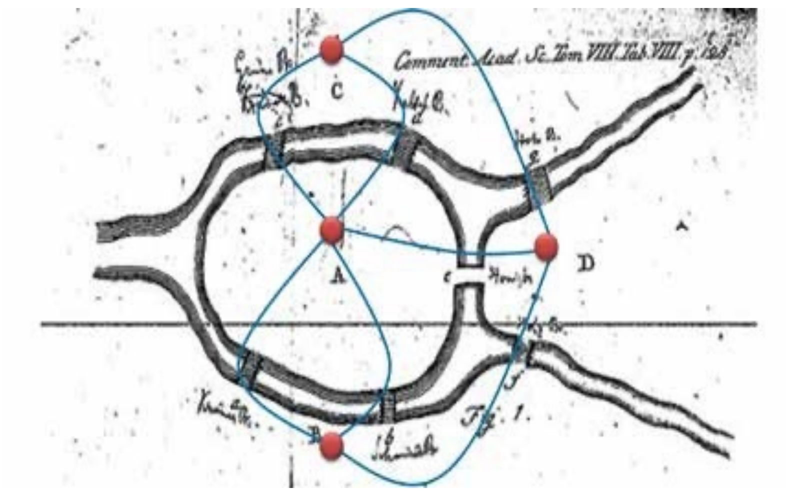
Variantes de la Dominación Romana en Grafos

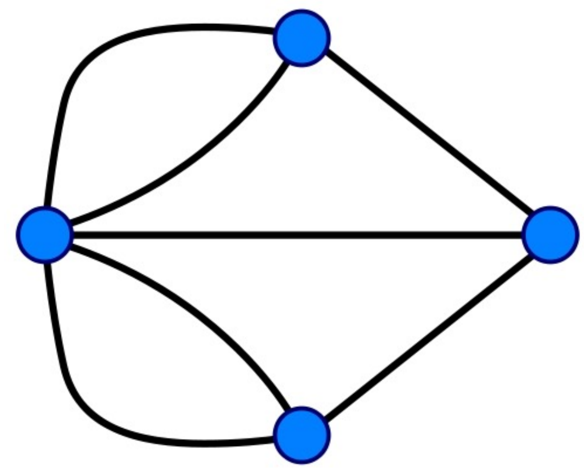
UCA
Universidad de Cádiz

- *Introducción.*
- *Dominación en grafos.*
- *Dominación Romana.*
- *Variantes de la Dominación Romana.*

Problema de los Puentes de Königsberg

En el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg (Prusia), actualmente Kaliningrado (Rusia), se situaba en las orillas y en las islas del río Pregel, que en esa época estaba atravesado por siete puentes.





¿Se pueden atravesar todos los puentes pasando por ellos una sola vez?

EULER, L. "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis." Commentarii Academice Scientarum Imperialis Petropolitane 8, 128-140 (1736).

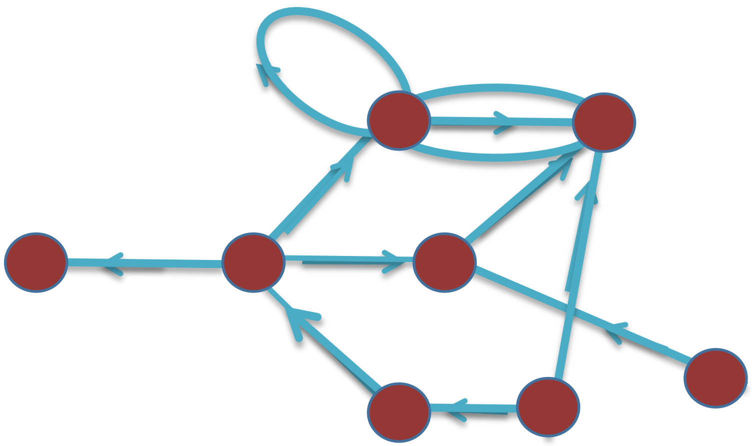
- ¿Qué es un grafo? Tipos de grafos.

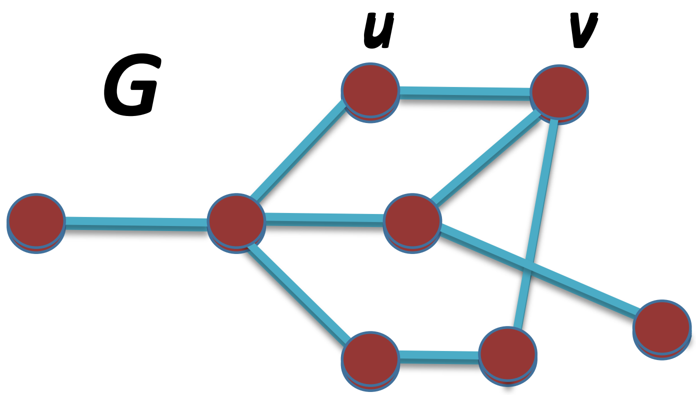
- Otras características de un grafo.

- Algunos grafos destacados.

Preliminares y definiciones

- Un ***grafo G*** es un par ordenado de conjuntos, ***G = (V , E)***





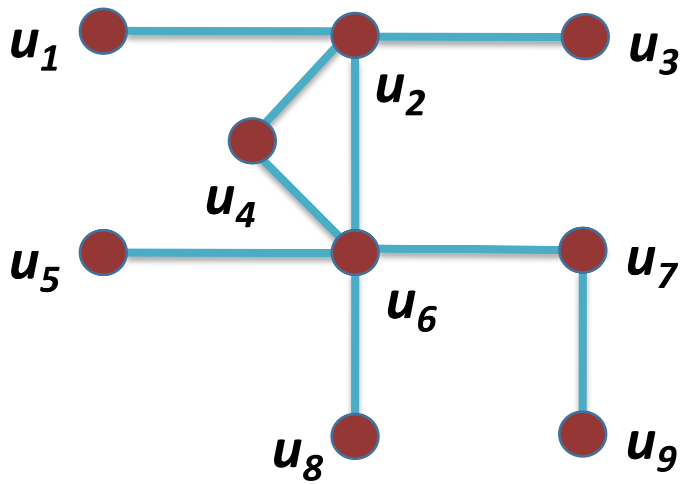
- Finitos o infinitos, según sea cardinal de ***V***.
- Dirigidos o no dirigidos, según lo sean o no sus aristas.
- Simples, si no hay aristas múltiples ni lazos.

- ¿Qué es un grafo? Tipos de grafos.
- Otras características de un grafo.
- Algunos grafos destacados.

- Un **camino** es una sucesión de vértices y aristas: $\{\, \boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_{r+1}} \,\}$
- **Longitud camino** $\{\, \boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_{r+1}} \,\}$ = número de aristas = $\boldsymbol{r}$
- **Distancia:** $\boldsymbol{d_G(u_i, u_j)}$ longitud camino más corto entre $\boldsymbol{u_i}$ y $\boldsymbol{u_j}$
- **Diámetro:** $\boldsymbol{Diam(G) = máx\, \{d_G(u_i, u_j),\, u_i, u_j \in V,\, i \neq j\}}$

$d_G(u_1, u_7) = 3$

$Diam(G) = 4$

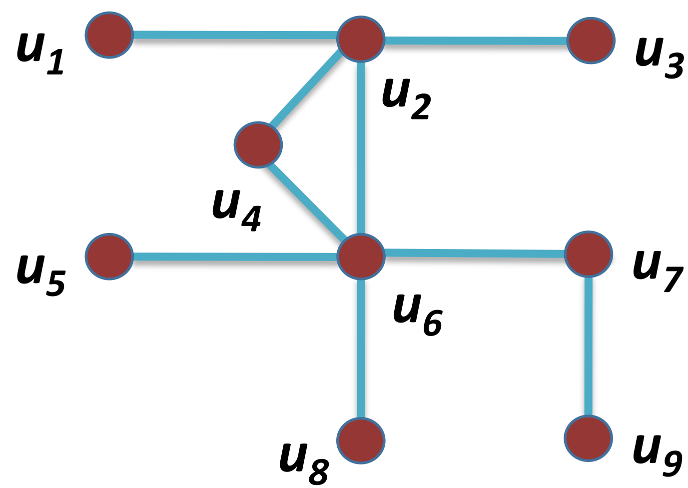


- Un **ciclo** es un camino de la forma $\{ \boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_{r+1}}, \boldsymbol{u_1} \}$
- **Girth o cintura** de un grafo es la longitud del ciclo más corto
- **Vecindad:** $\boldsymbol{N_G(u) = \{ v \in V}$ adyacentes a $\boldsymbol{u\ \}}$, $\boldsymbol{u \in V}$
- **Grado de un vértice:** $\boldsymbol{d_G(u) = |N_G(u)|}$, $\boldsymbol{u \in V}$
- $\boldsymbol{\delta(G)}$ y $\boldsymbol{\Delta(G)}$ son los grados mínimo y máximo de $\boldsymbol{G}$

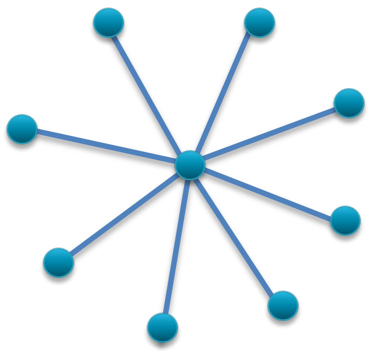
$N_G(u_2) = \{ u_1, u_3, u_4, u_6 \}$

$d_G(u_2) = 4$

$\delta(G) = 1$ y $\Delta(G) = 5$

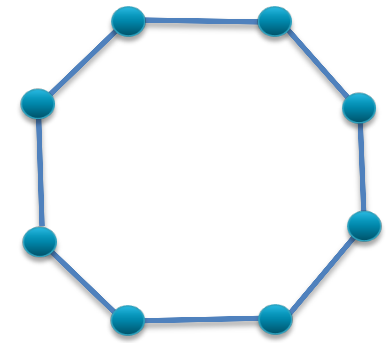


- ¿Qué es un grafo? Tipos de grafos.
- Otras características de un grafo.
- Algunos grafos destacados.

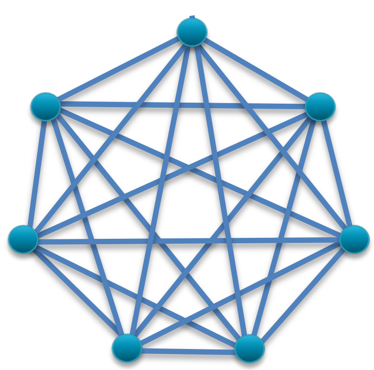


Estrella $K_{1,8}$

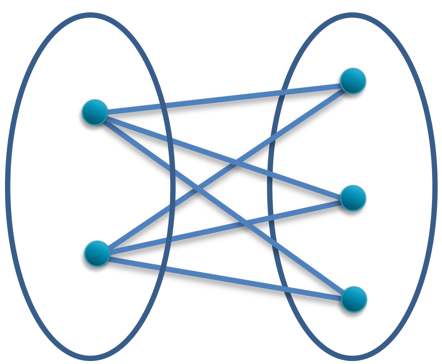
Camino P_5



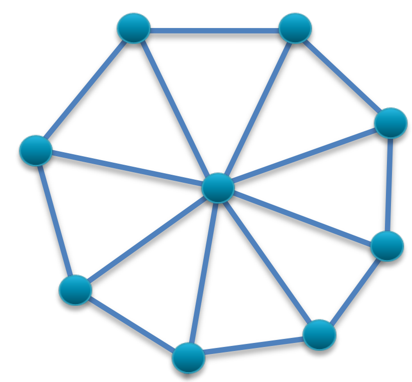
Ciclo C_8



Grafo completo K_7

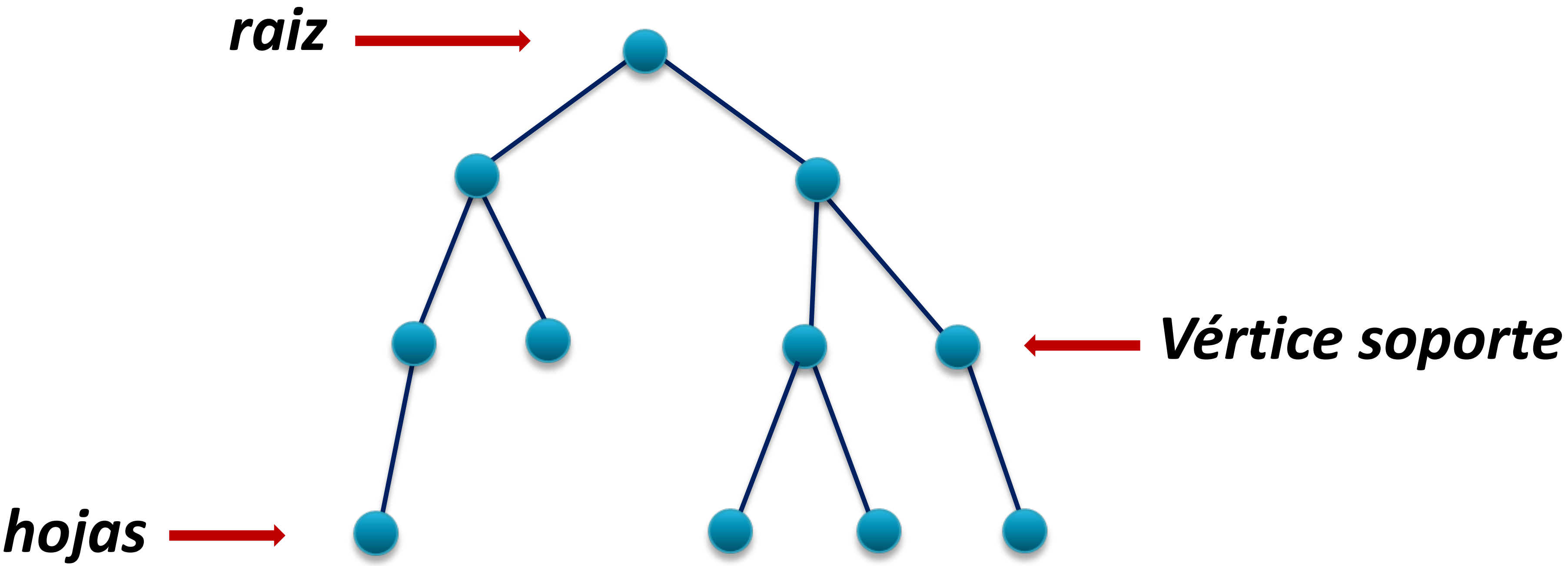


Bipartito $K_{2,3}$



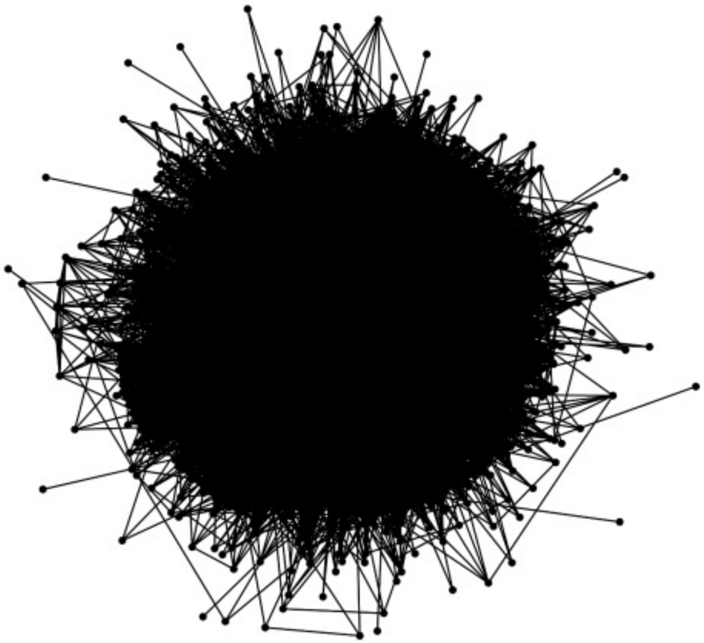
Rueda $W_{1,8}$

Un grafo *G* es un ***árbol*** si y solo si ***conexo*** y no contiene ciclos.



- *Introducción a la teoría de grafos.*
- *Dominación en grafos.*
- *Dominación Romana.*
- *Variantes de la Dominación Romana.*

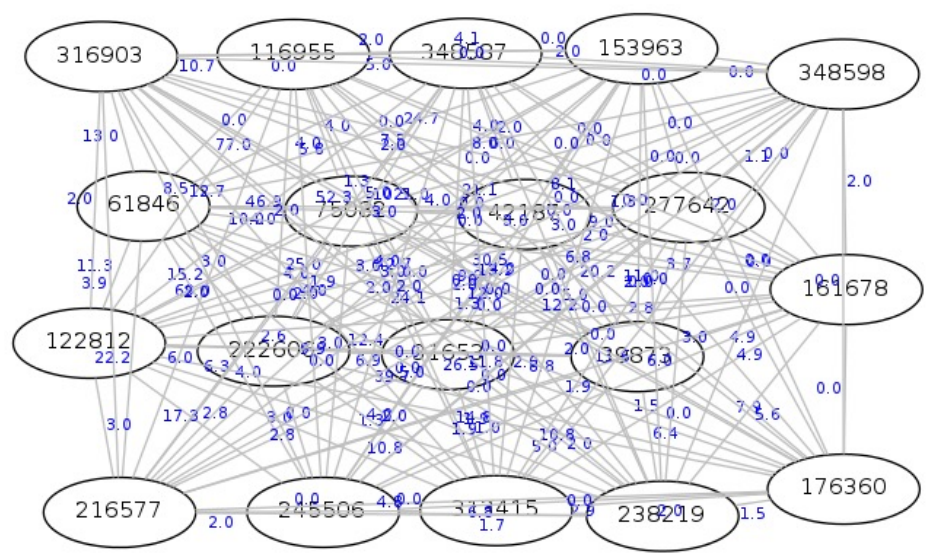
Universidad de Cádiz



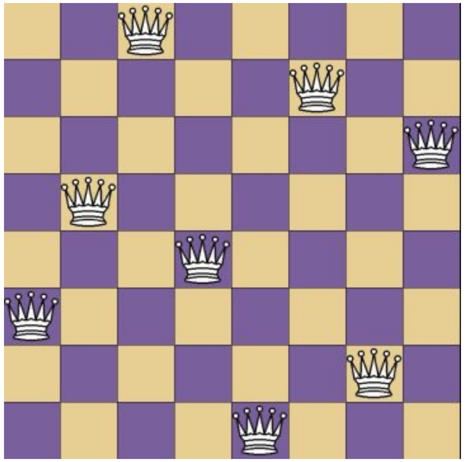
Grafo representación de intención voto

- Vertices = Usuarios/Votantes
- Aristas = Votos compartidos

Subgrafo correspondiente a una publicación concreta



India hace más de 400 años: Conjunto de piezas de ajedrez que cubrían o dominaban el tablero.

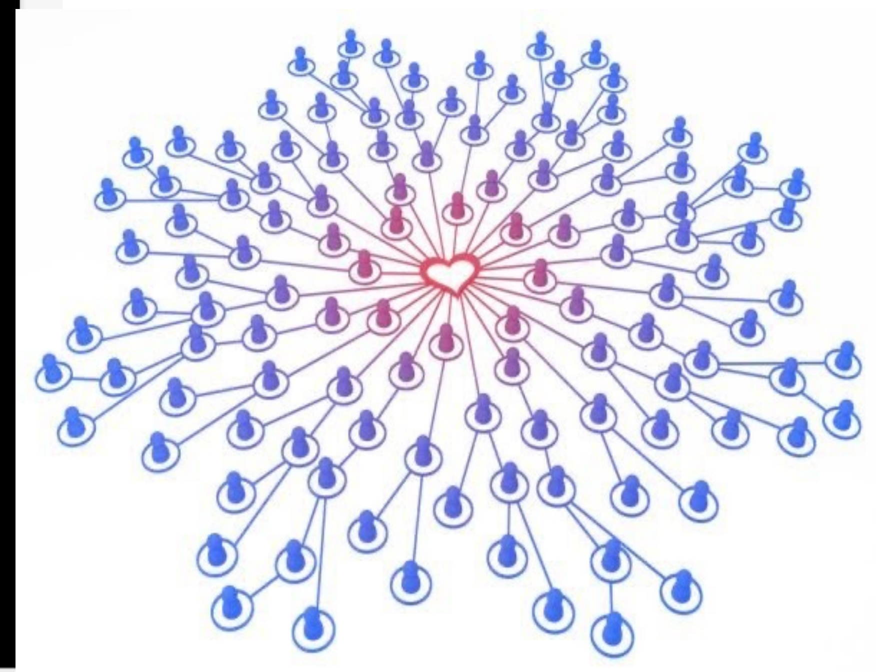


Problema planteado S. XIX: mínimo número de reinas necesarias que, sin atacarse entre ellas, dominan el resto de cuadrados de un tablero de ajedrez 8×8.

Aplicaciones

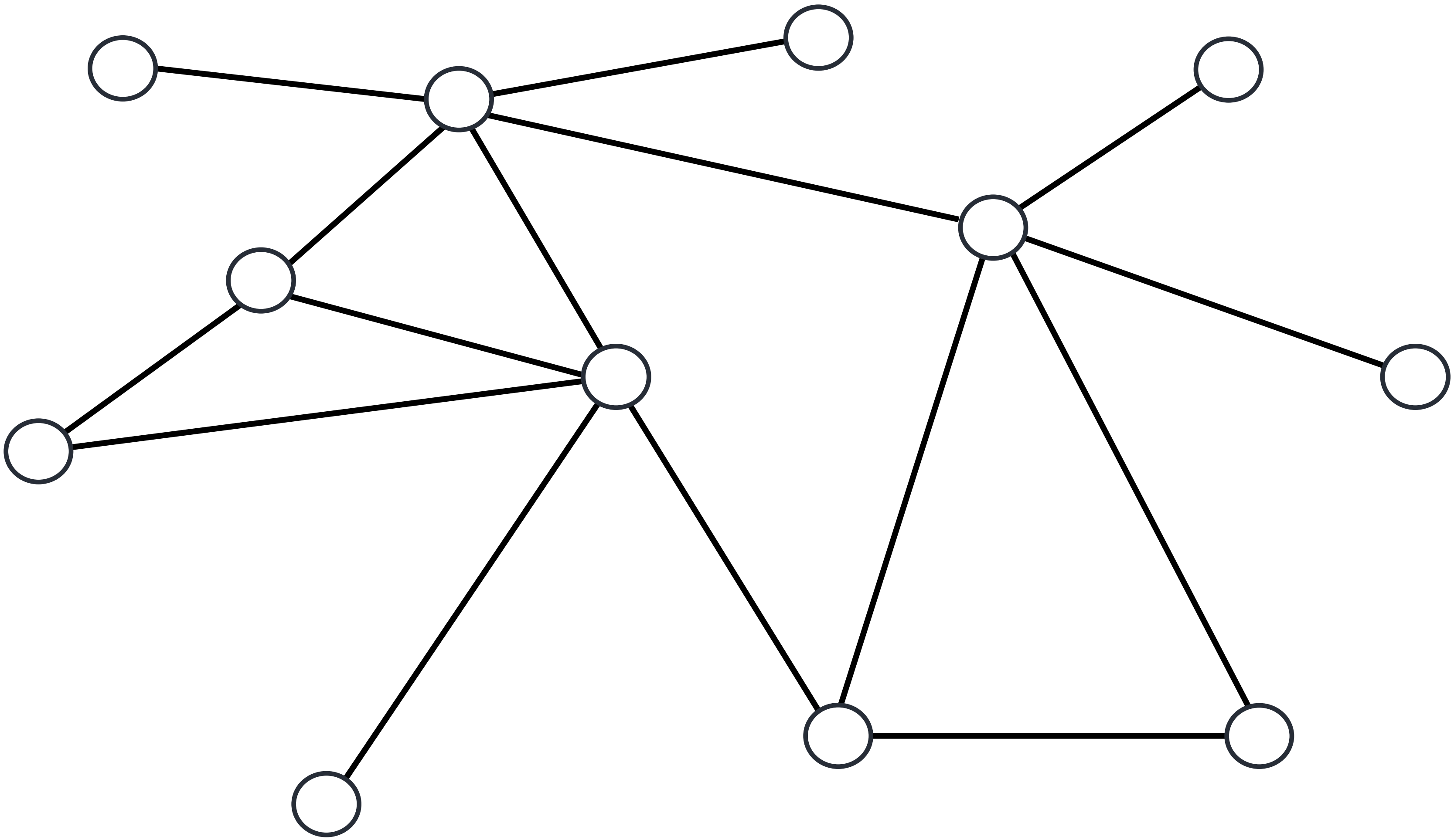
- Localización de servicios:
    - contenedores de residuos domiciliarios
    - hospitales
    - estaciones de bomberos
    - cajeros automáticos, etc
- Instalación de detectores de incendios en edificios.
- Instalación de detectores de fallos en redes de ordenadores

La “importancia” de los influencers



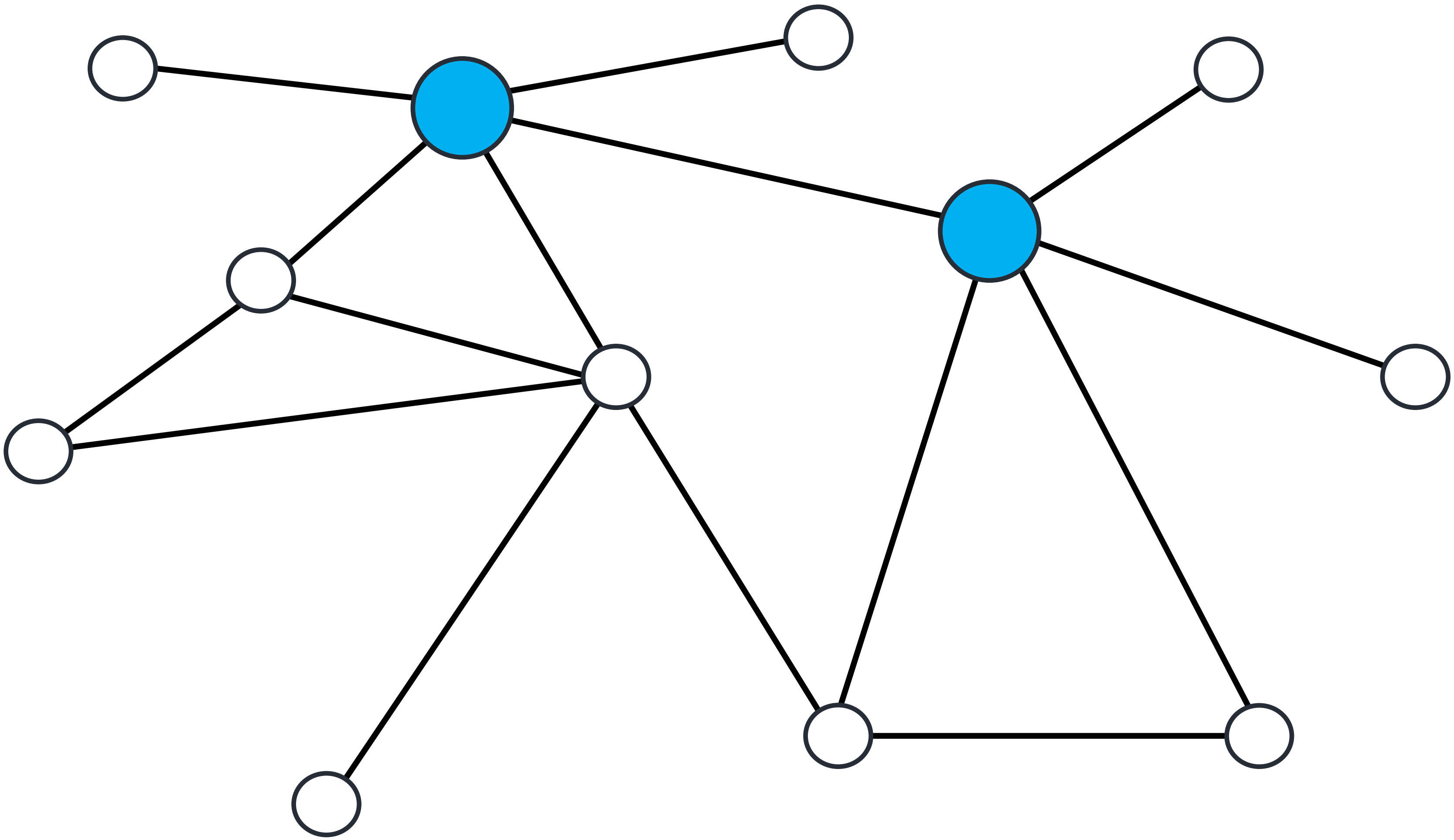
Dominación en grafos

Motivación



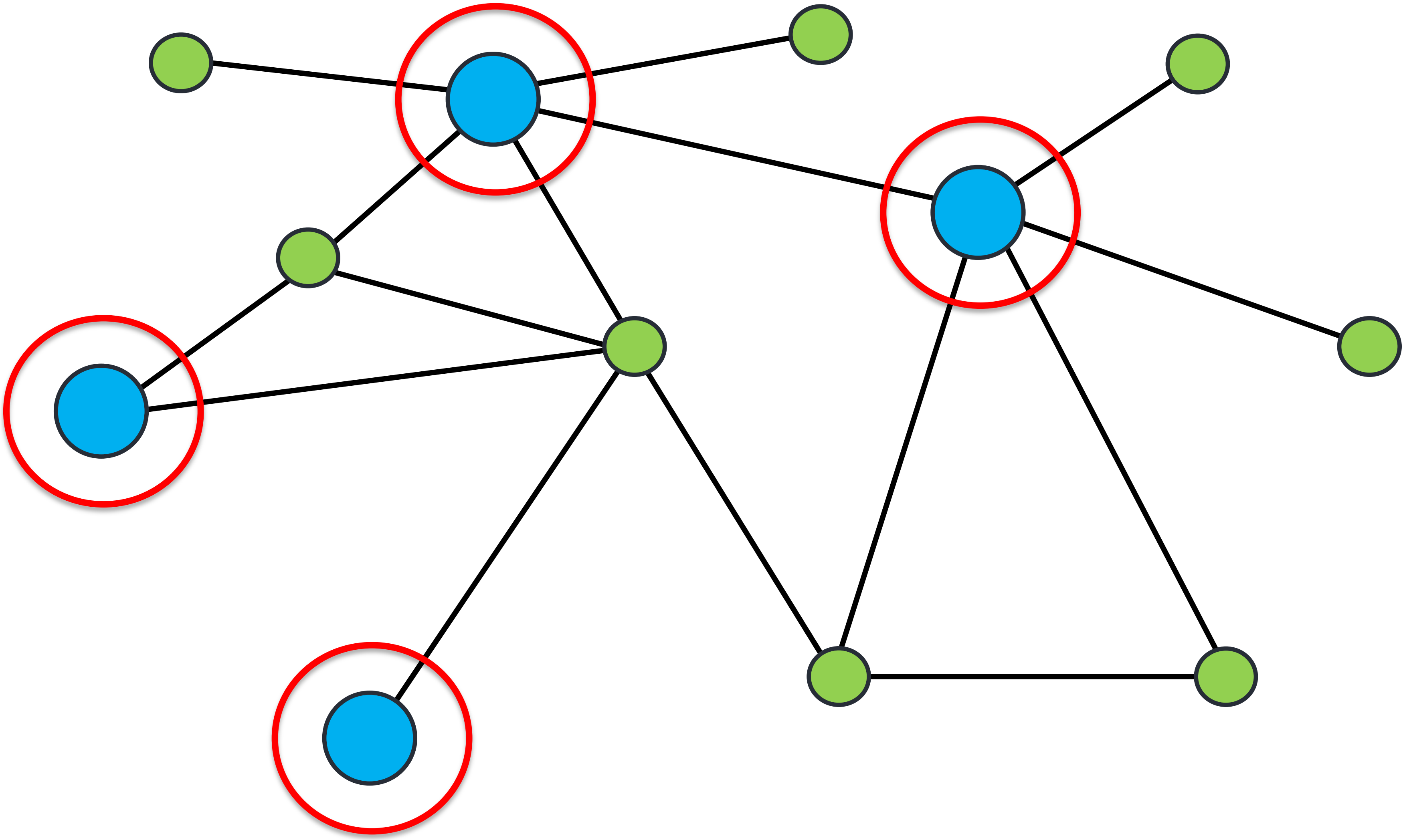
Dominación en grafos

Motivación



Dominación en grafos

Motivación

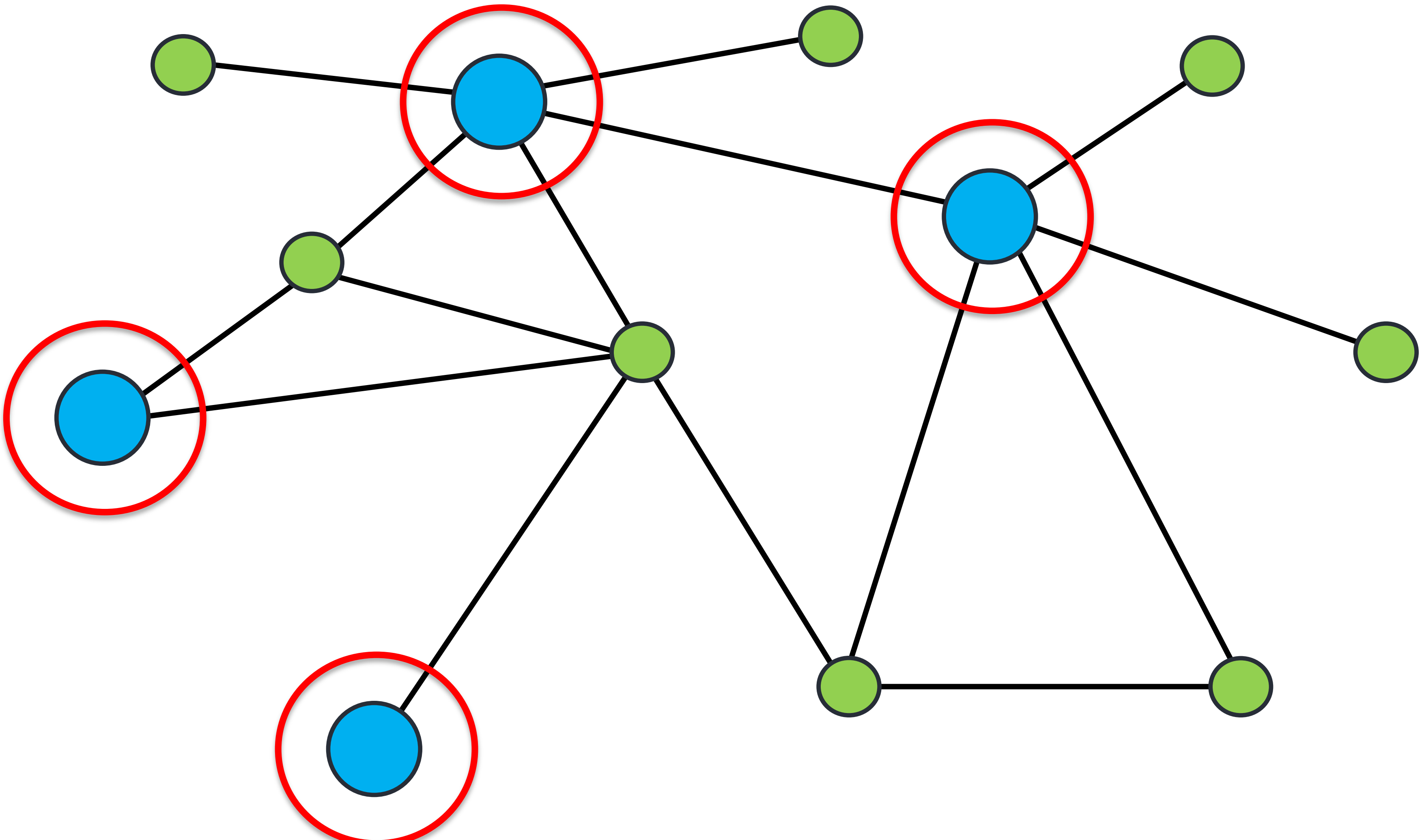


Dominación en grafos

Encontrar conjuntos dominantes con cardinal mínimo.

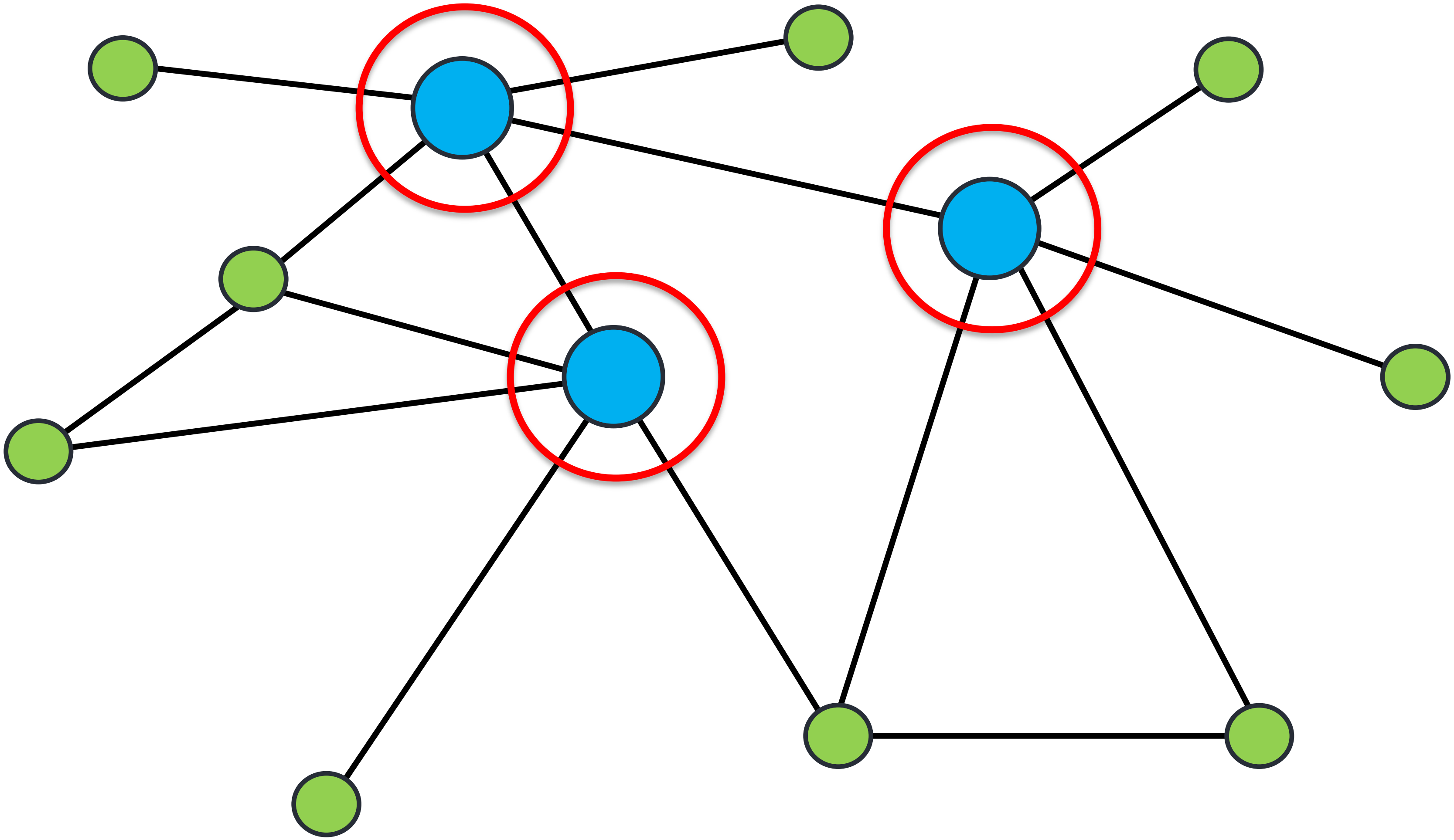
Dominación en grafos

Motivación



Dominación en grafos

Motivación



Definiciones

Dado un grafo G=(V,E), diremos que un conjunto de vértices $S \subseteq V$ es **dominante**, si cada vértice $v \notin S$ tiene al menos un vecino en S

Dado un grafo G=(V,E), se define el **número de dominación** *de* G, y se nota por $\gamma(G)$, como el menor cardinal de todos los conjuntos dominantes en G

- *Introducción a la teoría de grafos.*
- *Dominación en grafos.*
- *Dominación Romana.*
- *Variantes de la Dominación Romana.*

Dominación Romana

Origen : Estrategia Defensiva Imperio Romano

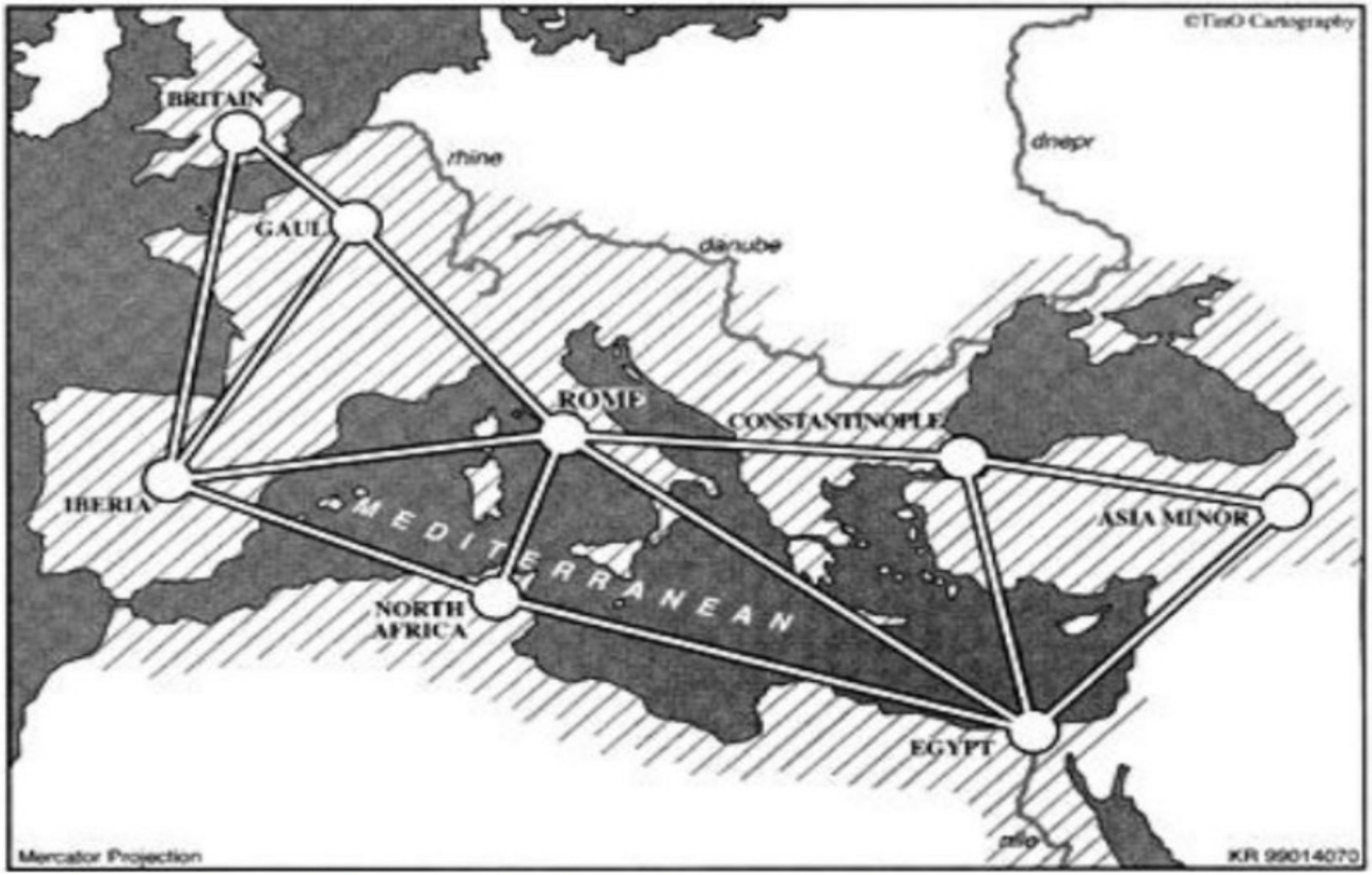


Fig 1.1 Map of Roman Empire. Adapted from http://www.ammc.com.

Dominación Romana

Origen : Estrategia Defensiva Imperio Romano

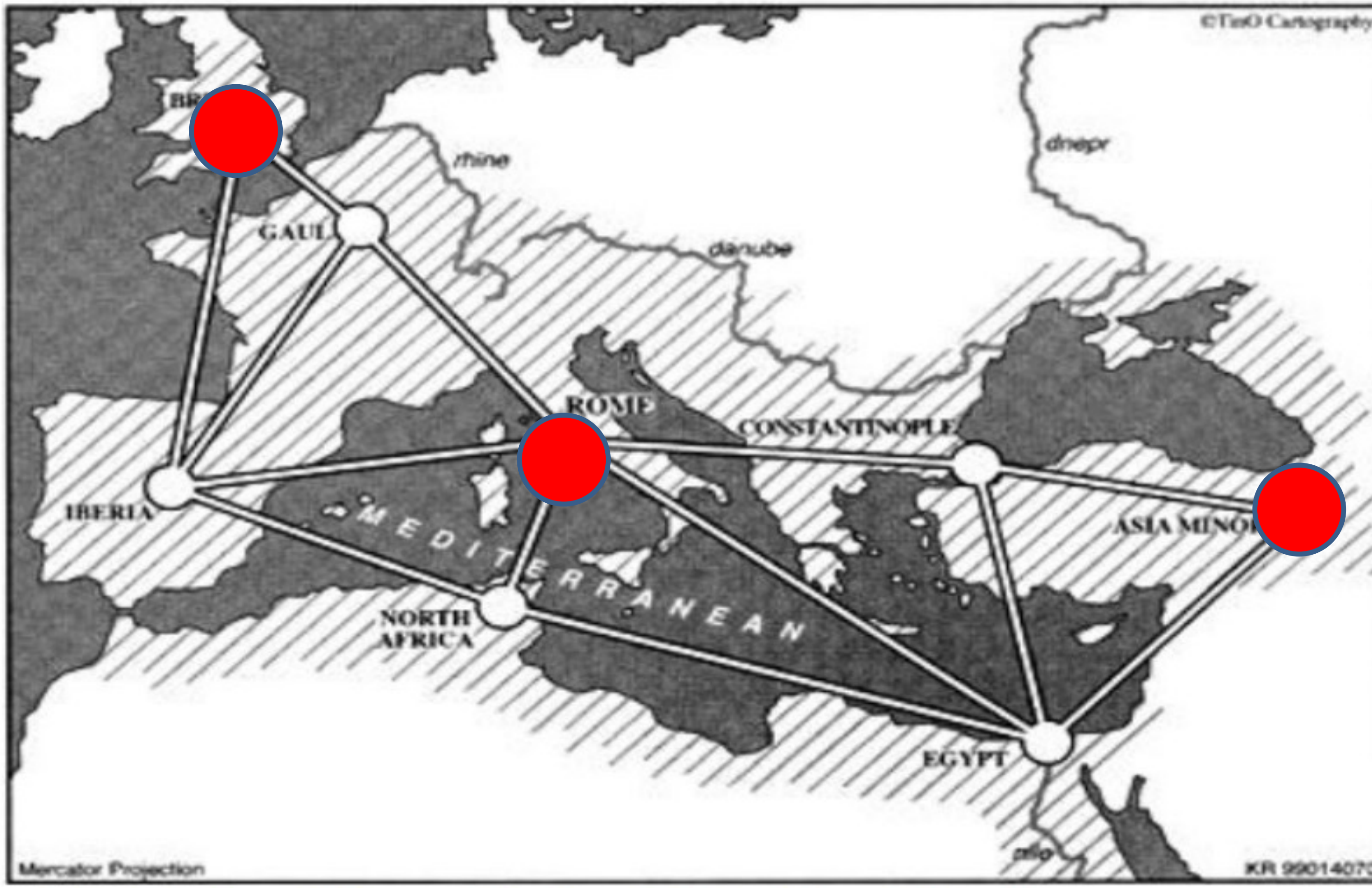


Fig 1.1 Map of Roman Empire. Adapted from http://www.ammc.com.

Dominación Romana

Origen : Estrategia Defensiva Imperio Romano

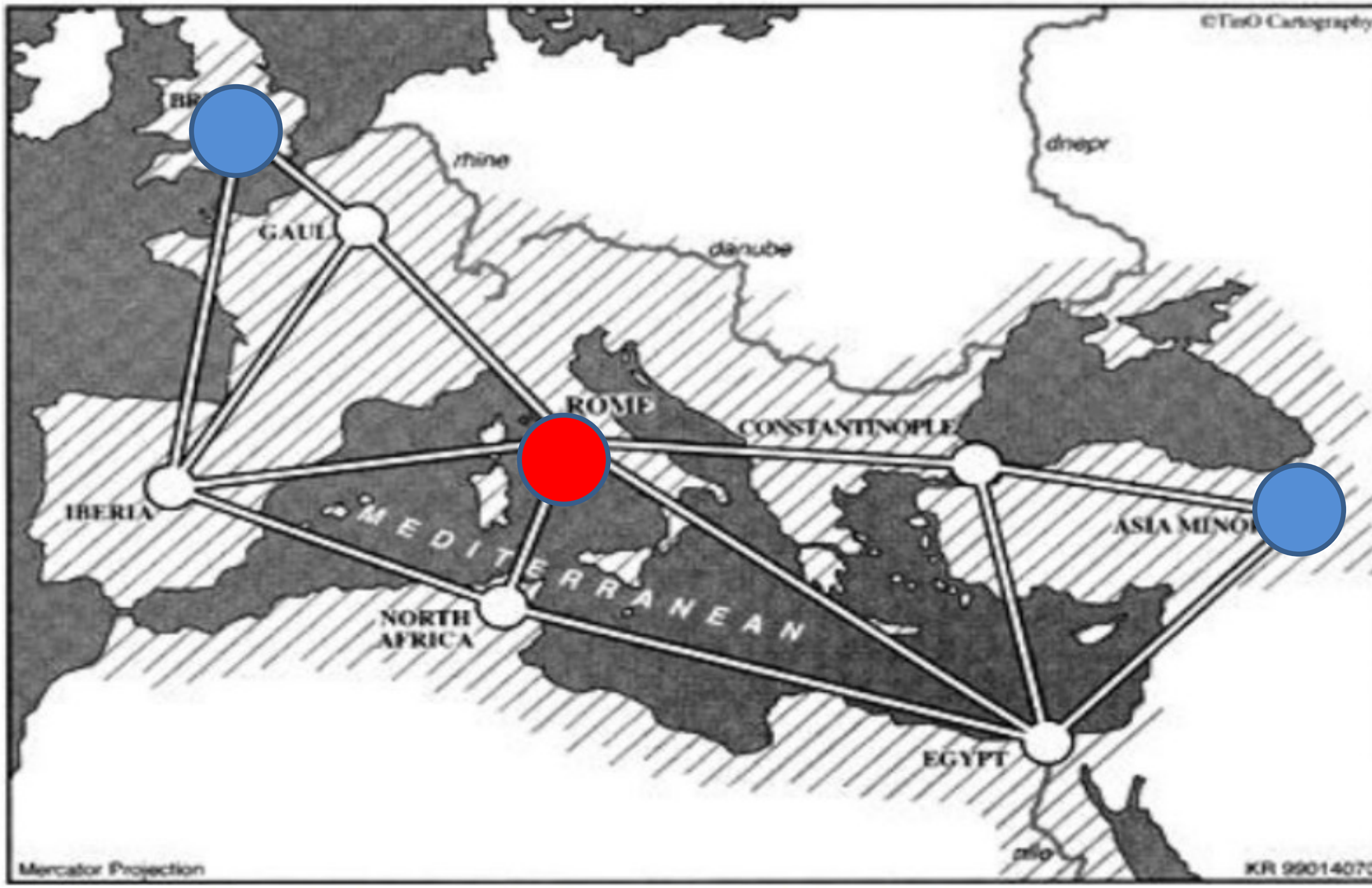


Fig 1.1 Map of Roman Empire. Adapted from http://www.ammc.com.

Dominación Romana

Origen : Estrategia Defensiva Imperio Romano

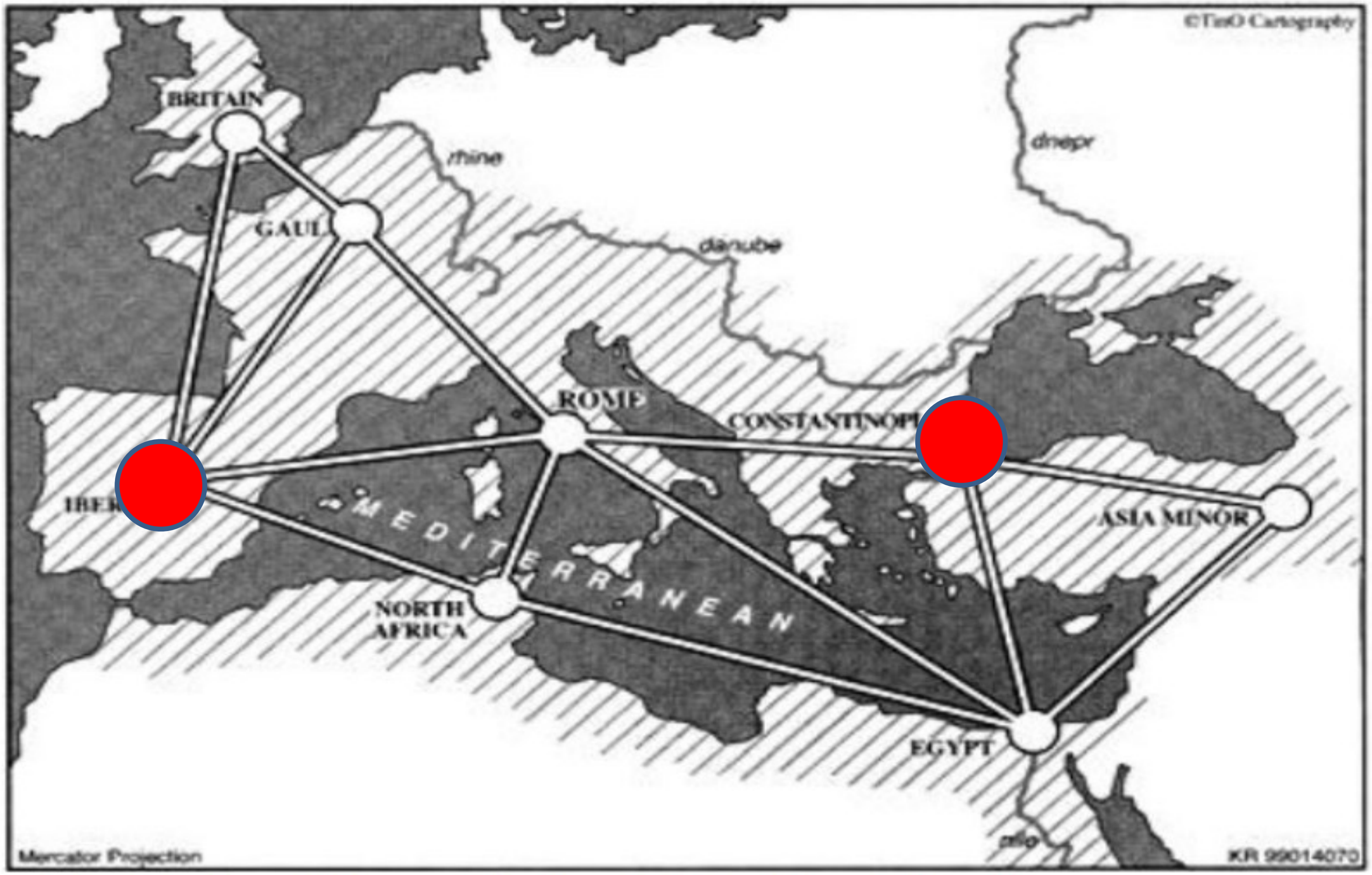
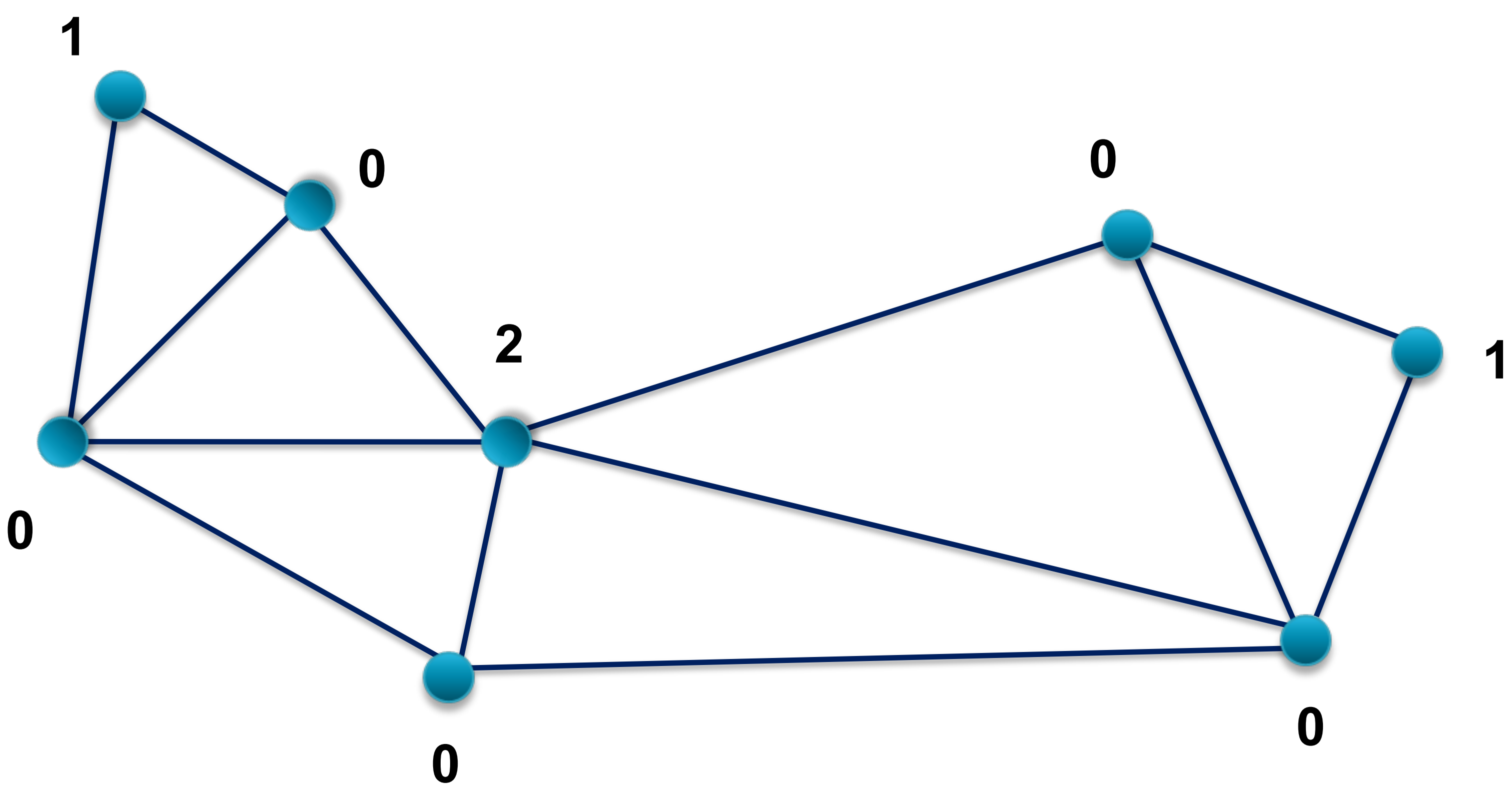


Fig 1.1 Map of Roman Empire. Adapted from http://www.ammc.com.

Dominación Romana

Origen : Estrategia Defensiva Imperio Romano

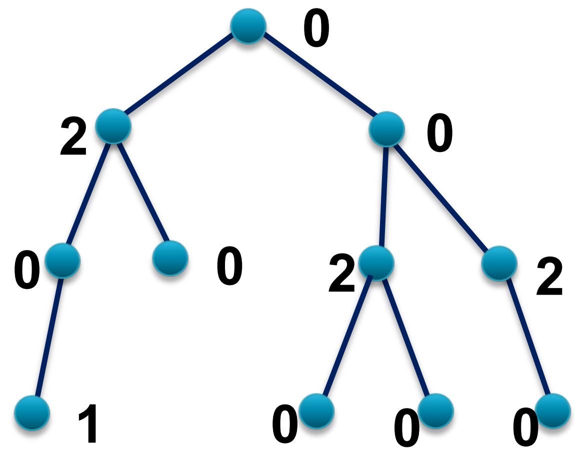


Dominación Romana

Definición (Cockayne y otros 2004)

Dado un grafo G = G(V,E), y dada la función $f: V \rightarrow \{0,1,2\}$ diremos que f es una **función de Dominación Romana** en *G*, si cada vértice v con *f(v)=0*, tiene al menos un vecino u tal que *f(u)=2*

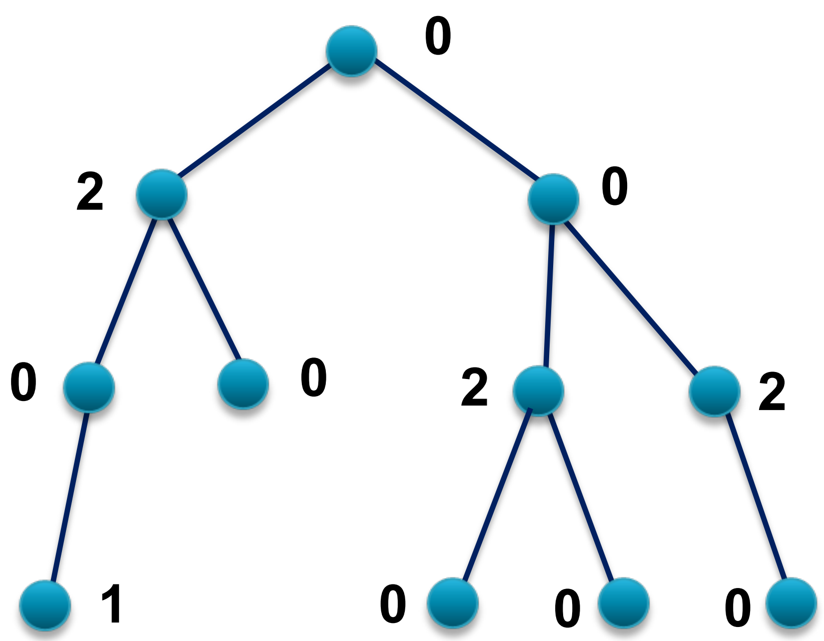
$$w(f) = 7$$



Dominación Romana *Definiciones.*

Se define el **Número de Dominación Romana** de un grafo G, y se nota por $\gamma_R(G)$, como el menor de los pesos de todas las funciones romanas en G

$$\gamma_{R(G)} = mín\{w(f): f \text{ es función de dominación romana en } G\}$$



$w(f) = 7$

Preliminares. Relación entre Dominación y Dominación Romana.

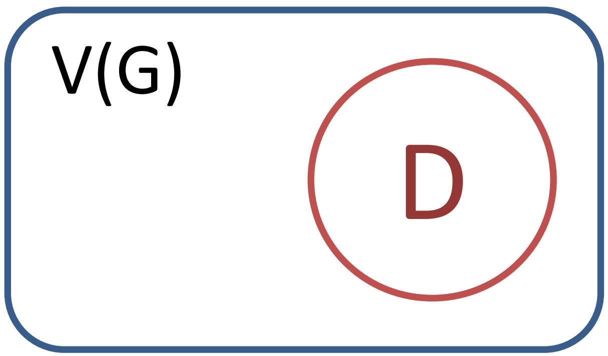
Toda función de dominación Romana, f, en G induce una partición, $\{V_0, V_1, V_2\}$, donde $V_i = \{v \in V \; tal \;\; que \;\; f(v) = i\}$

- ✓ **Observación:**
  - ✓ $w(f) = f(V) = \sum_{u \in V} f(u) = 2|V_2| + |V_1|$
  - ✓ $V_1 \cup V_2$ **es un conjunto dominante**

$$\boldsymbol{\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)}$$

Preliminares. Relación entre Dominación y Dominación Romana.

$$\boldsymbol{\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)}$$

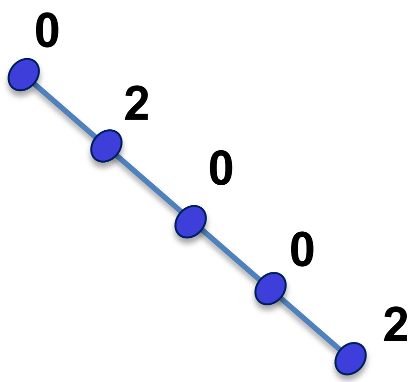


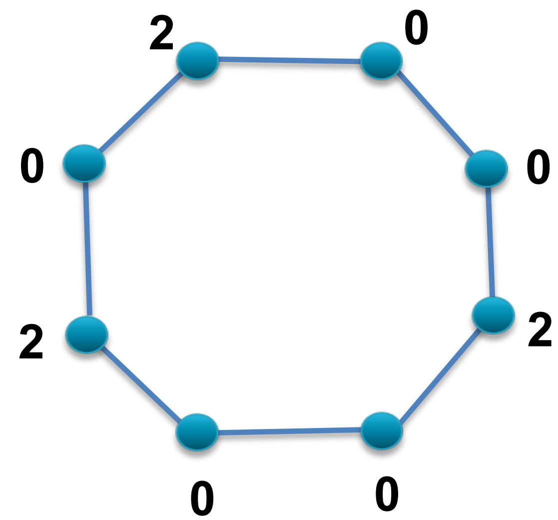
- D es un conjunto dominante
- f(v)=2, si $v \in D$ y f(z)=0 en otro caso
- $\gamma_R(G) \leq w(f) = 2|D| = 2\gamma(G)$

Por otro lado, si f es mínima,

$$\gamma(G) \leq |V_1| + |V_2| \leq |V_1| + 2|V_2| = \gamma_R\,(G)$$

Número de Dominación Romana en algunos grafos.

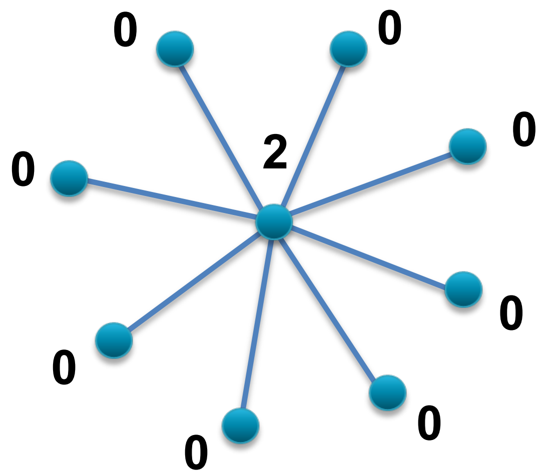


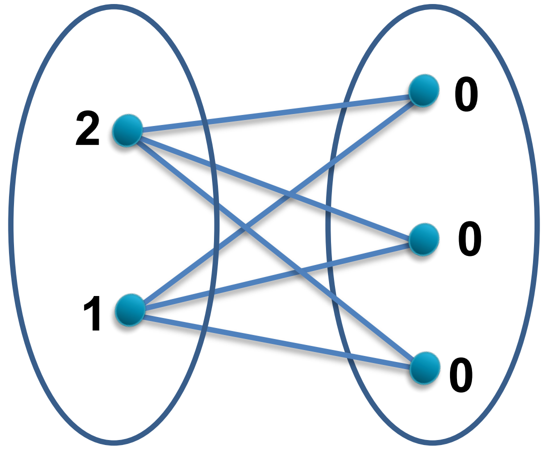


$$\gamma_R(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

$$\gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

Número de Dominación Romana en algunos grafos.





$\gamma_R(K_{1,n}) = 2$

$\gamma_R(K_{2,s}) = 3$

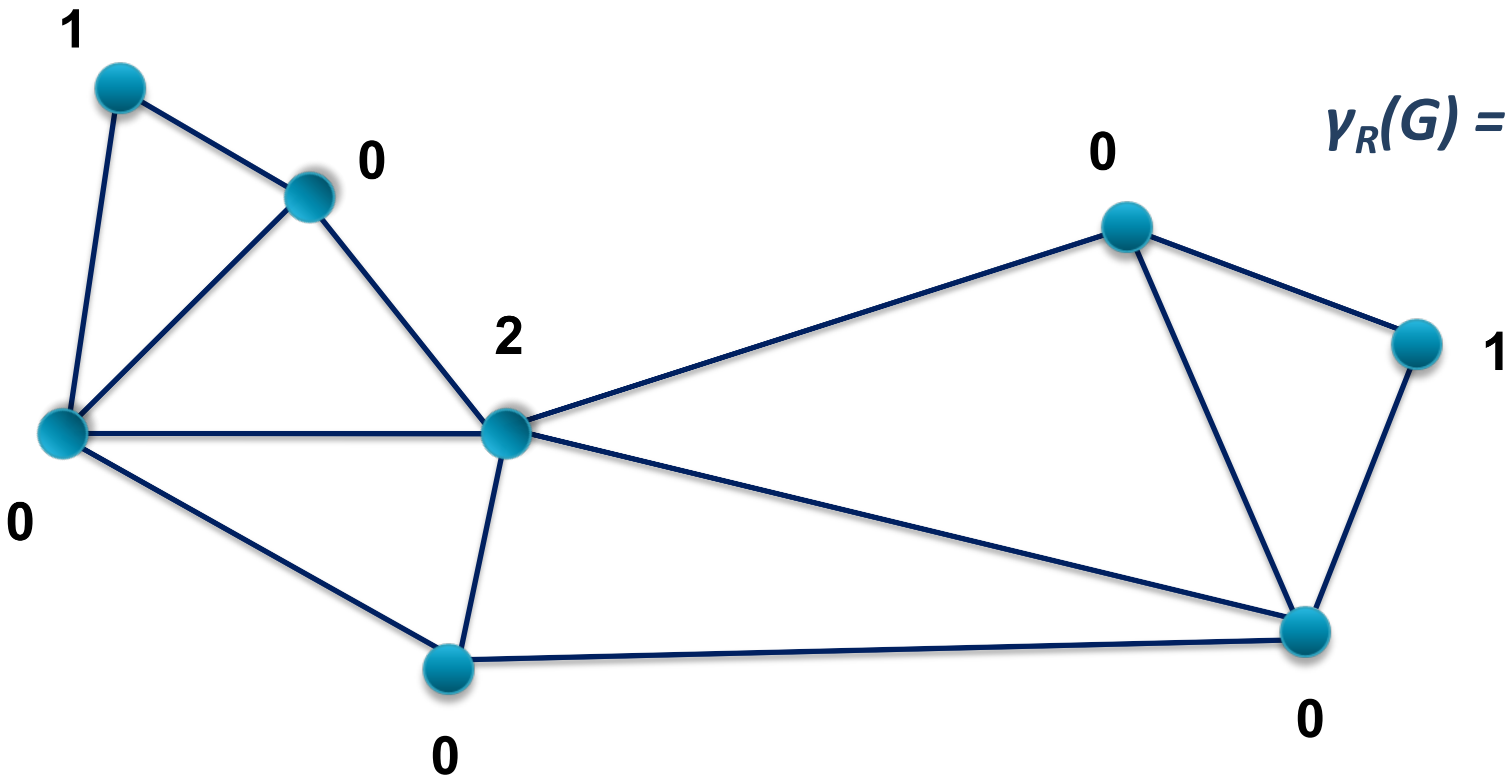
$\gamma_R(K_{r,s}) = 4$

- *Introducción.*
- *Dominación en grafos.*
- *Dominación Romana.*
- *Variantes de la Dominación Romana.*

Universidad de Cádiz

dominación Romana doble vs. dominación Romana

¿ y si se necesita reforzar la defensa ?

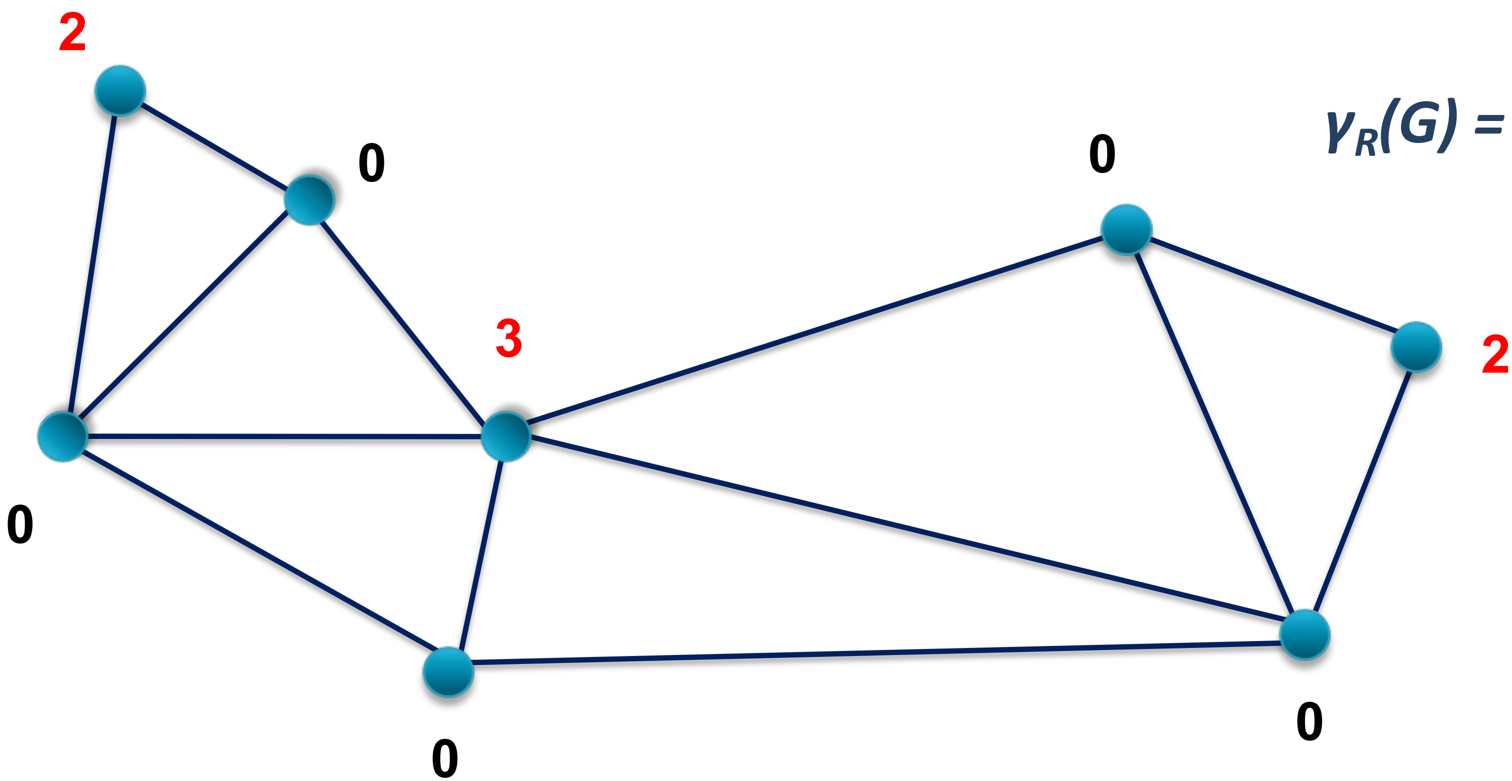


$\gamma_R(G) = 4$

Dominación Romana doble: nueva estrategia de defensa.

DUPLICAR LA DEFENSA

nuevo coste defensa = 7



$\gamma_R(G) = 4$

Dominación Romana doble

Definición (Beeler y otros 2016)

Se dice que f es una función de ***dominación romana doble*** en G si verifica que:

a) Si $f(v) = 0$, entonces el vértice v debe tener al menos un vecino en V_3 o al menos dos vecinos en V_2

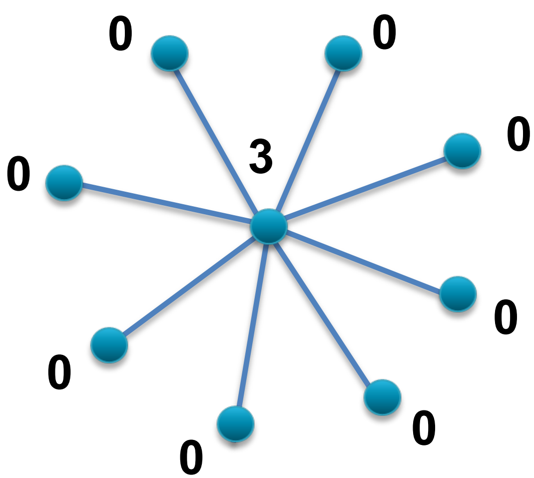
b) Si $f(v) = 1$, entonces el vértice v debe tener al menos un vecino en $V_2 \cup V_3$

Dominación Romana doble

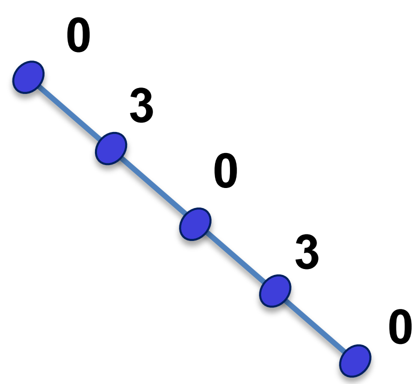
Definición (Beeler y otros 2016)

Se define ***número de dominación romana doble*** de un grafo *G*, y se nota por $\gamma_{dR}(G)$, como el menor de los pesos de todas las funciones romanas dobles en *G*.

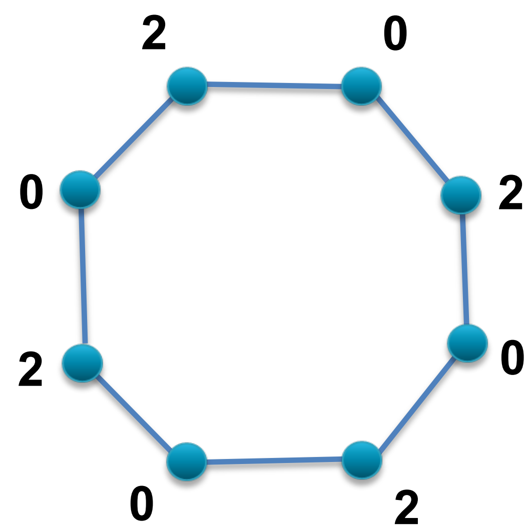
$$\gamma_{dR}(G) = mín\{w(f) : f \text{ función de dominación doble en } G\}$$



$\gamma_{dR}(K_{1,8}) = 3$



$\gamma_{dR}(P_5) = 6$

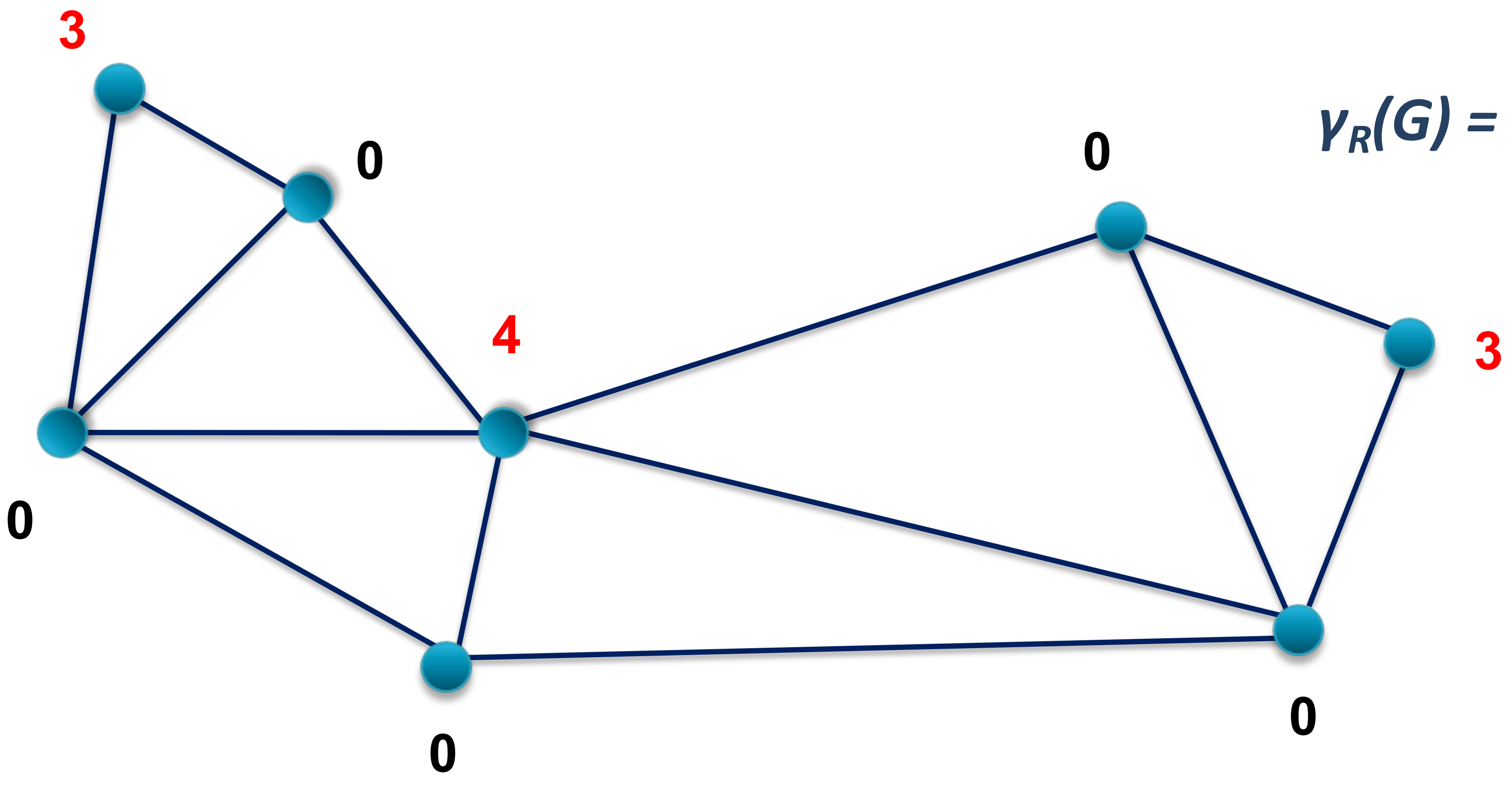


$\gamma_{dR}(C_8) = 8$

Dominación Romana triple: nueva estrategia de defensa.

TRIPLICAR LA DEFENSA

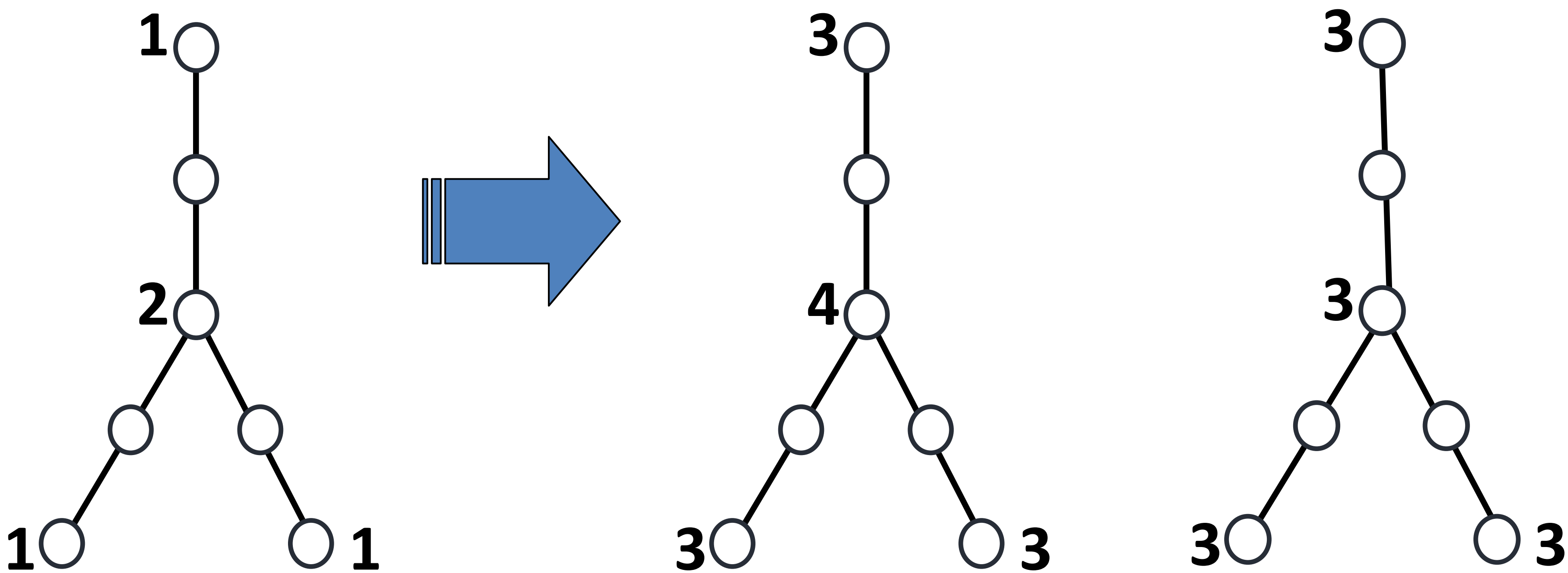
nuevo coste defensa = 10



$\gamma_R(G) = 4$

Dominación Romana triple: nueva estrategia de defensa.

TRIPLICAR LA DEFENSA



$\gamma_R(G) = 5$ $w(g) = 13$ $w(f) = 12$

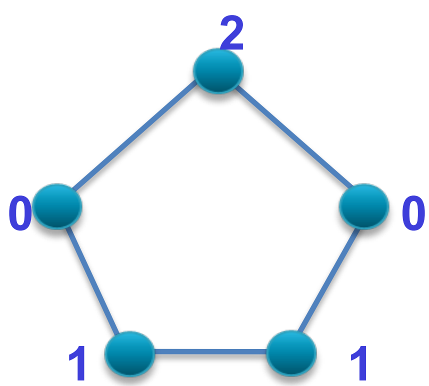
Ahangar; Álvarez; Chellali ; Sheikholeslami; Valenzuela-Tripodoro (2021)

Se dice que f es una función de ***dominación romana triple*** en G si verifica que:

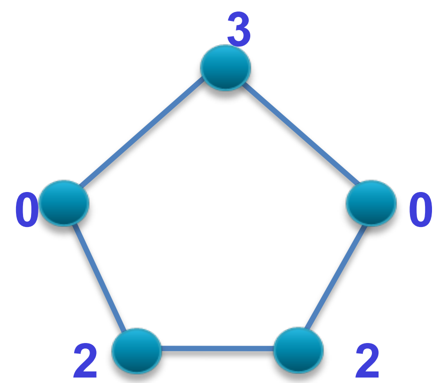
a) Si $f(v) = 0$, entonces el vértice v debe tener, o un vecino en V_4, o un vecino en V_2 y otro en V_3, o tres vecinos en V_2

b) Si $f(v) = 1$, entonces el vértice v debe tener un vecino en $V_3 \cup V_4$, o dos vecinos en V_2

c) Si $f(v) = 2$, entonces el vértice v debe tener un vecino en $V_2 \cup V_3 \cup V_4$



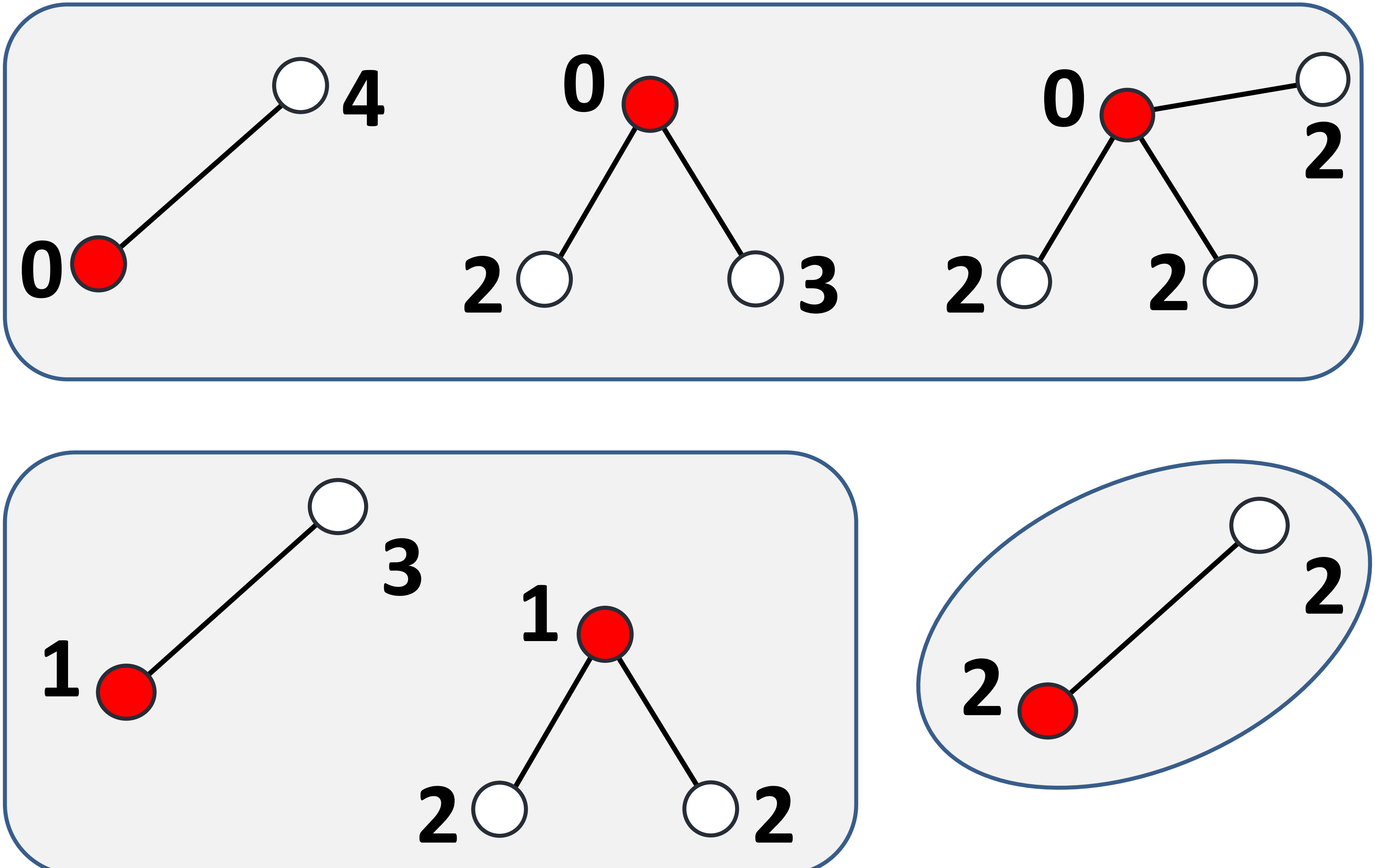
$\gamma_R(C_5)=4$



$\gamma_{[3R]}(C_5)=7$

Aumento de defensa al triple con solo aumento de coste del 75%

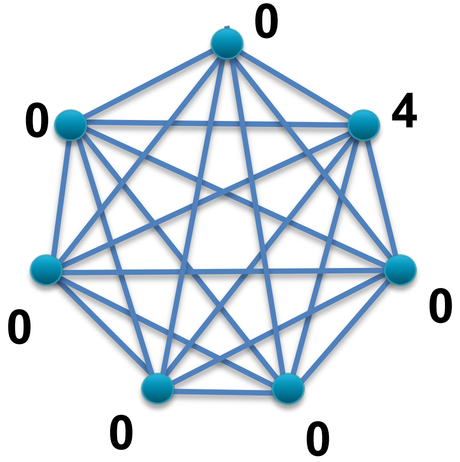
Dominación Romana triple **TRIPLICAR LA DEFENSA**



Prop

Sea G un grafo conexo con $n \geq 2$ vértices, entonces

$$\gamma_{[3R]}(G) = 4 \quad si\ y\ solo\ si \quad \Delta = n\text{-}1$$



Prop

No existe ningún grafo conexo de orden n con $\gamma_{[3R]}(G) = 5$

Prop

Sea *G* un grafo conexo con $n \geq 2$ vértices y $\Delta \geq 1$. Entonces,

$$\gamma_{[3R]}(G) \leq 3n - 3\Delta + 1$$

Prop

Sea *G* un grafo conexo con $n \geq 2$ vértices, $\Delta \leq n-2$, $\delta \geq 2$ y *girth* al menos 4. Entonces $\gamma_{[3R]}(G) \leq 3n - 3\Delta$

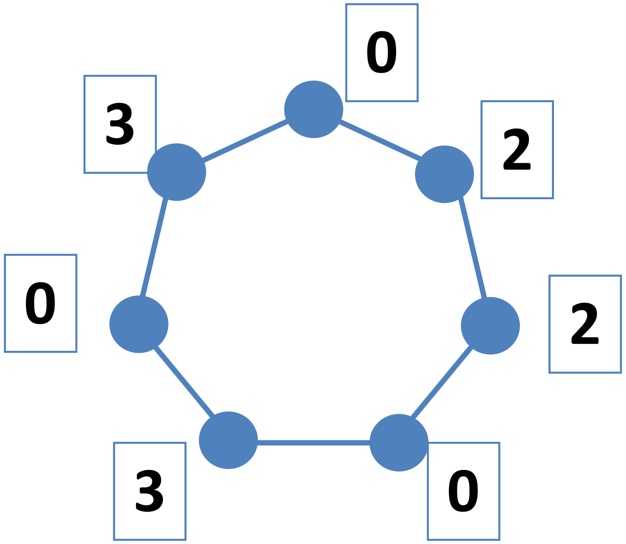
Prop

Sea *G* un grafo conexo r-regular de orden *n* y *girth* al menos 7. Entonces $\gamma_{[3R]}(G) \leq 2n - 2r^2 + 3r - 2$

Prop

Sea *G* un grafo conexo con $n \geq 2$ vértices, $\Delta \leq n-2$, $\delta \geq 2$ y *girth* al menos 5. Entonces $\gamma_{[3R]}(G) \leq 2n - 2\Delta + 1$

Algunas cotas en términos n, Δ y δ



$$\gamma_{[3R]}(C_7)=10$$

$$\gamma_{[3R]}(C_7)\leq 2n-2\Delta+1=11$$

$$\gamma_{[3R]}(C_7)=2n-2r^2+3r-2$$

Prop Sea G un grafo conexo de orden n. Entonces

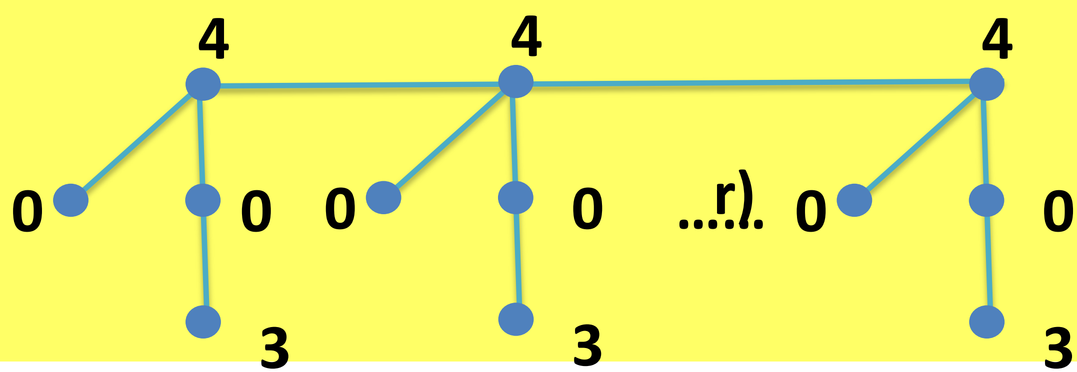
$$\gamma_{[3R]}(G) \leq \left\lfloor \frac{4n}{\delta+1} \ln\left(\frac{3(\delta+1)}{4}+1\right) \right\rfloor$$

Prop

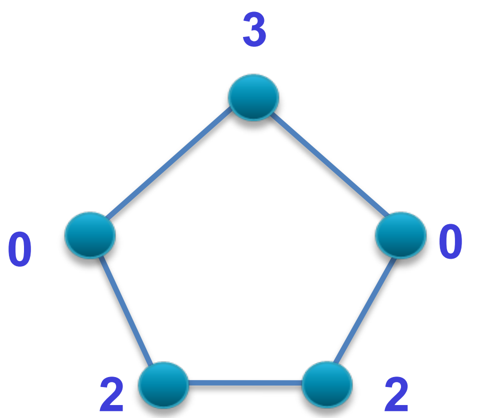
Sea G un grafo conexo con orden $n \geq 3$, entonces $\gamma_{[3R]}(G) \leq \frac{7n}{4}$

$\gamma_{[3R]}(T) = \frac{7n}{4}$ si y solo si T es de la familia de árboles

$\gamma_{[3R]}(T) = 7r = \frac{7n}{4}$



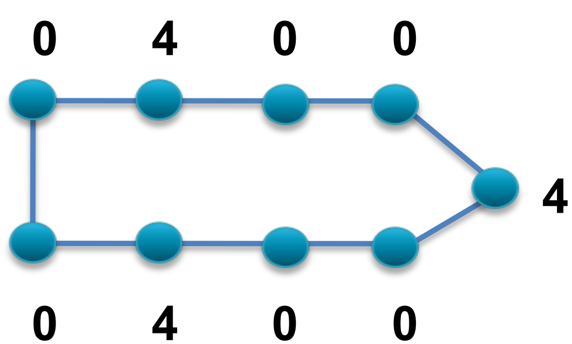
Algunas cotas en términos n, Δ y δ



$$\gamma_{[3R]}(C_5)=7$$

$$\left\lfloor \frac{4n}{\delta+1}\left(\ln\left(\frac{3(\delta+1)}{4}\right)+1\right)\right\rfloor=12$$

$$3n-3\Delta+1=10$$



$$\gamma_{[3R]}(C_9)=12$$

$$\left\lfloor \frac{4n}{\delta+1}\left(\ln\left(\frac{3(\delta+1)}{4}\right)+1\right)\right\rfloor=21$$

$$3n-3\Delta+1=22$$

Dominación Romana triple

Relación con otras dominaciones

Si *G es* un grafo conexo n trivial, entonces

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{[3R]}(G) \leq mín\left\{\frac{3}{2}\gamma_{dR}(G), 4\gamma(G)\right\}$$

$$\gamma_{[3R]}(G) \geq \left\lceil \frac{2n+(\Delta-1)\gamma(G)}{\Delta} \right\rceil$$

Dominación Romana triple en ciclos

Para todo ciclo C_n , con n ≥ 3, se tiene que

$$\gamma_{[3R]}(C_n)=\begin{cases}\left\lceil \dfrac{4n}{3} \right\rceil & \text{si } n=4,\ 5,\ 7,\ 10 \text{ o } n\equiv 0 \mod 3. \\[2ex] \left\lceil \dfrac{4n}{3} \right\rceil+1 & \text{si } n\neq 4,\ 5,\ 7,\ 10 \text{ y } n\equiv 1,2 \mod 3.\end{cases}$$

Dominación Romana triple en caminos

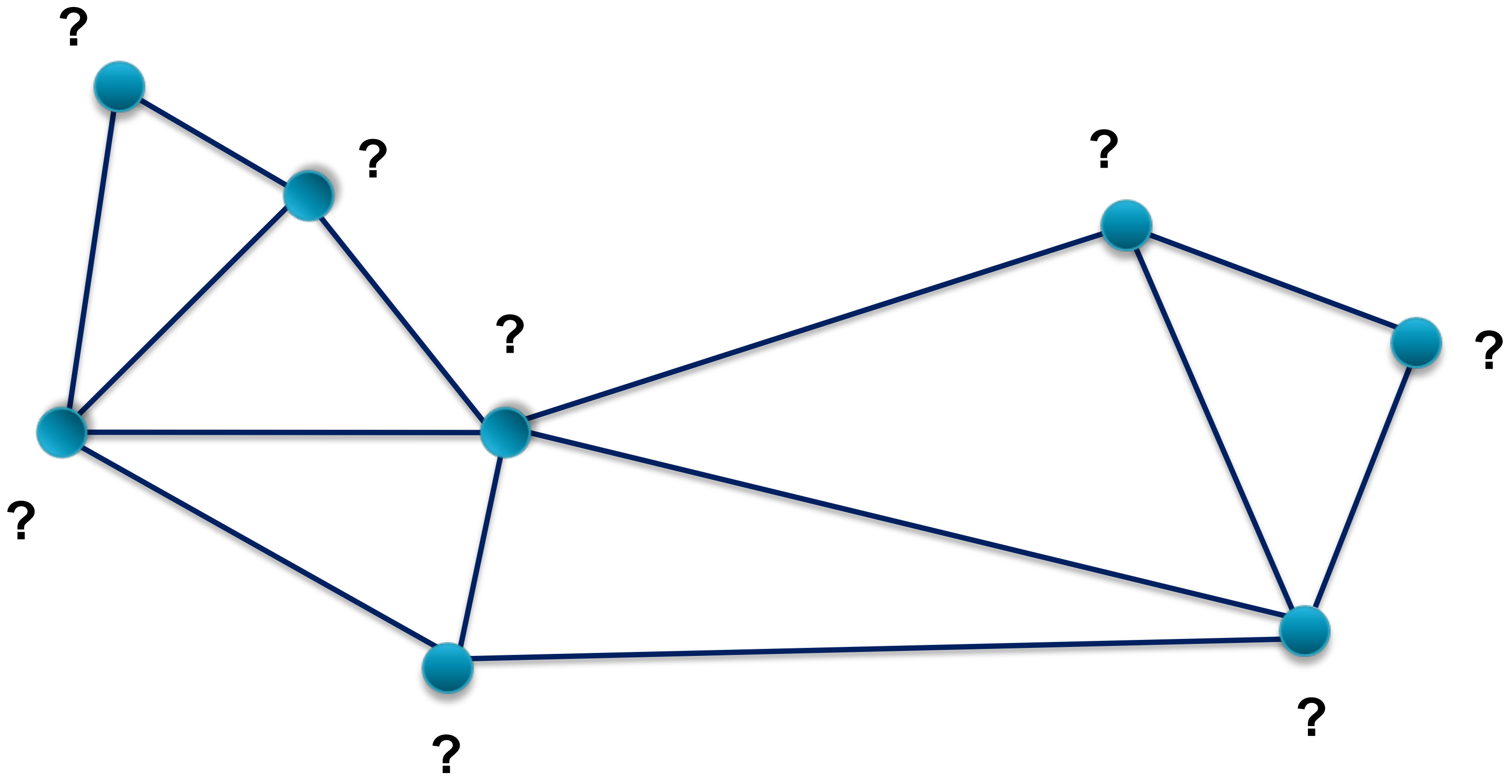
Para todo camino P_n, con $n \geq 2$, se tiene que

$$\gamma_{[3R]}(P_n) = \begin{cases} 4\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor & \text{si } n \equiv 0 \mod 3. \\[2ex] 4\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor + 3 & \text{si } n \equiv 1 \mod 3. \\[2ex] 4\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor + 4 & \text{si } n \equiv 2 \mod 3. \end{cases}$$

dominación Romana, Romana doble, Romana triple …

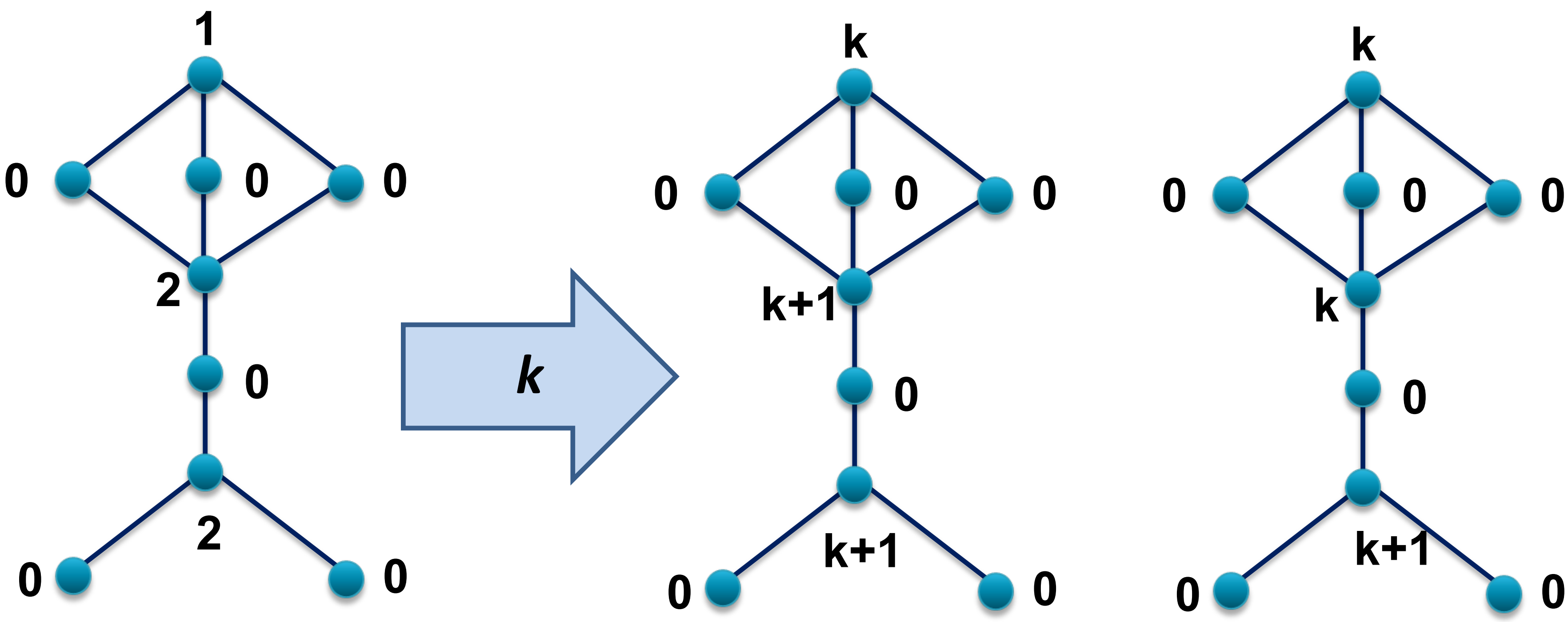
¿ Se puede generalizar la estrategia de defensa ?

$$\gamma_R(G) = 4,\ \gamma_{dR}(G) = 7,\ \gamma_{[3R]}(G) = 10, \ldots$$



[*k*]-*Multiple Roman Domination Romana k-ésima*

Valenzuela-Tripodoro; Mateos-Camacho; Cera; Álvarez; (enviado)



$\gamma_R(G) = 5$ $w(g) = 3k+2$ $\gamma_{[kR]}(G) = 3k+1$

Definición

A [k]-**multiple roman *domination*** funtion is

$$f : V \to \{0, 1, \ldots, k+1\},$$

If v ∈ V s.t. *f(v) < k,* then

$$f(AN[v]) \geq |AN(v)| + k$$

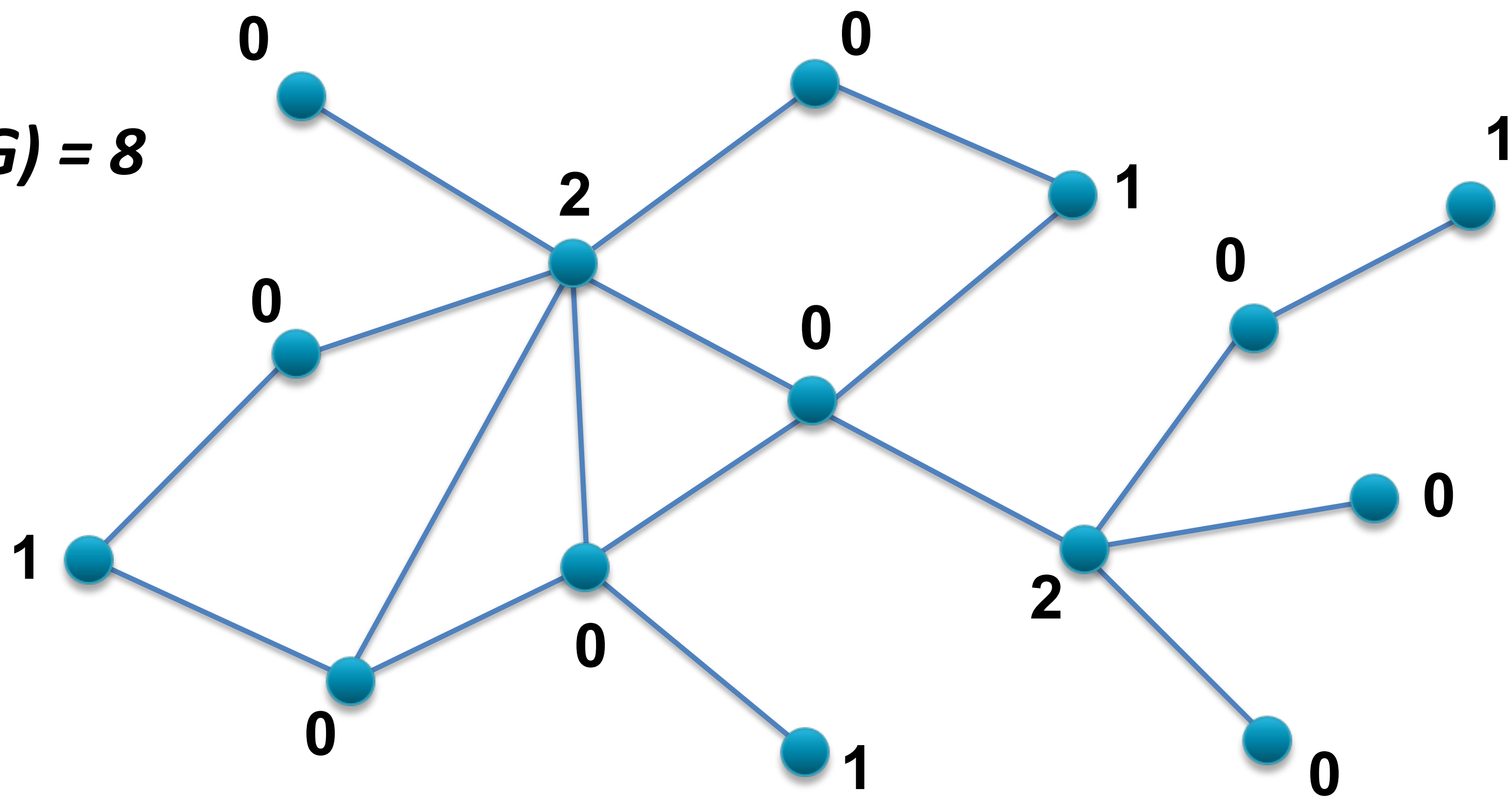
- *Introducción.*
- *Dominación en grafos.*
- *Dominación Romana.*
- *Variantes de la Dominación Romana.*
  - *Romana Múltiple.*
  - *Romana Fuerte.*

UCA
Universidad de Cádiz

Dominación Romana fuerte

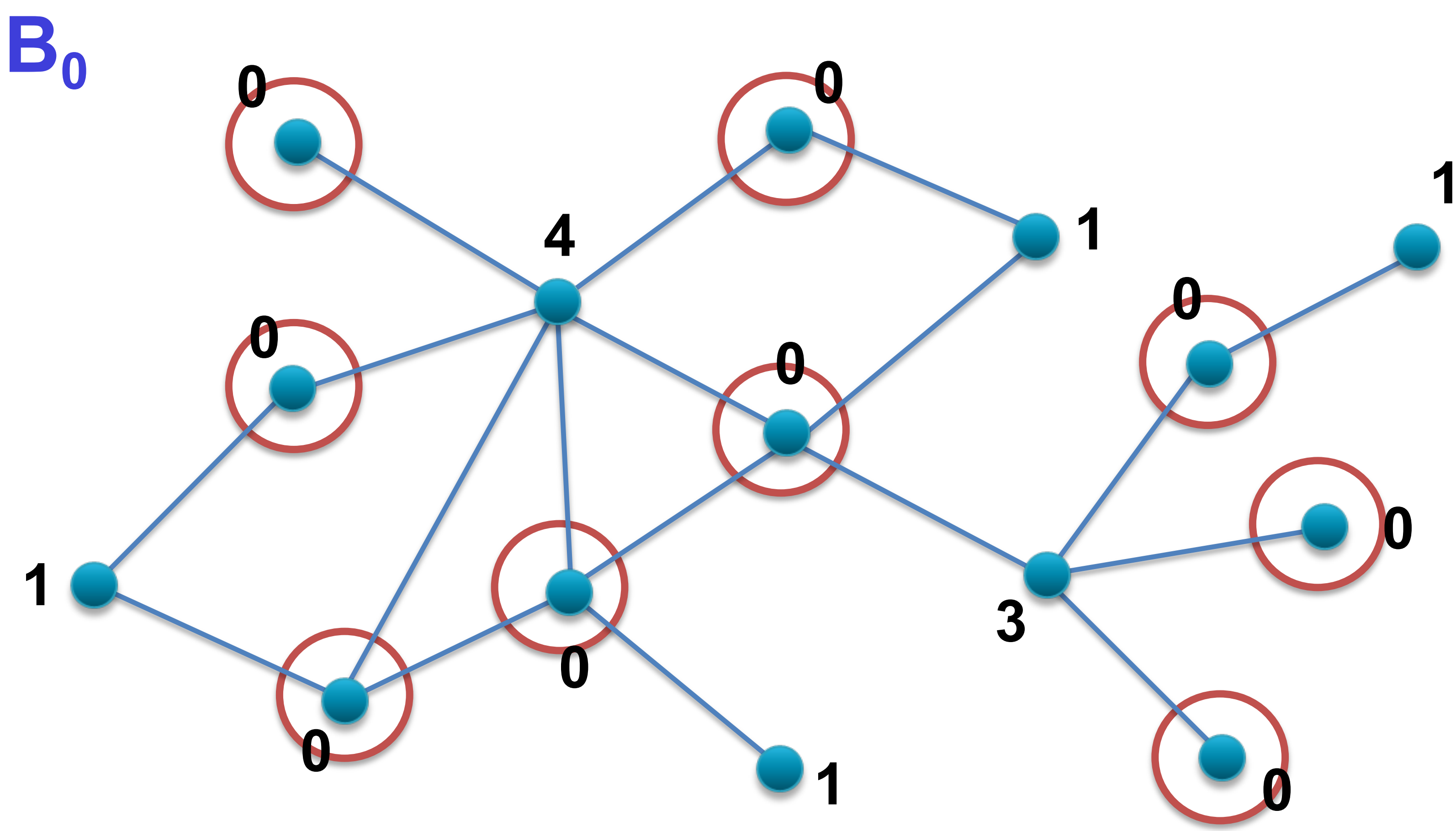
Motivación: ataque múltiple

$\gamma_R(G) = 8$



Variantes de la Dominación Romana

Dominación Romana fuerte



Dominación Romana fuerte

Valenzuela, González-Yero, Álvarez, Sheikoleshlami (2017)

Dado un grafo *G = (V , E)*, de grado máximo *Δ*, y dada la función:

$$f : V \rightarrow \left\{ 0, 1, \ldots, \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil + 1 \right\},$$

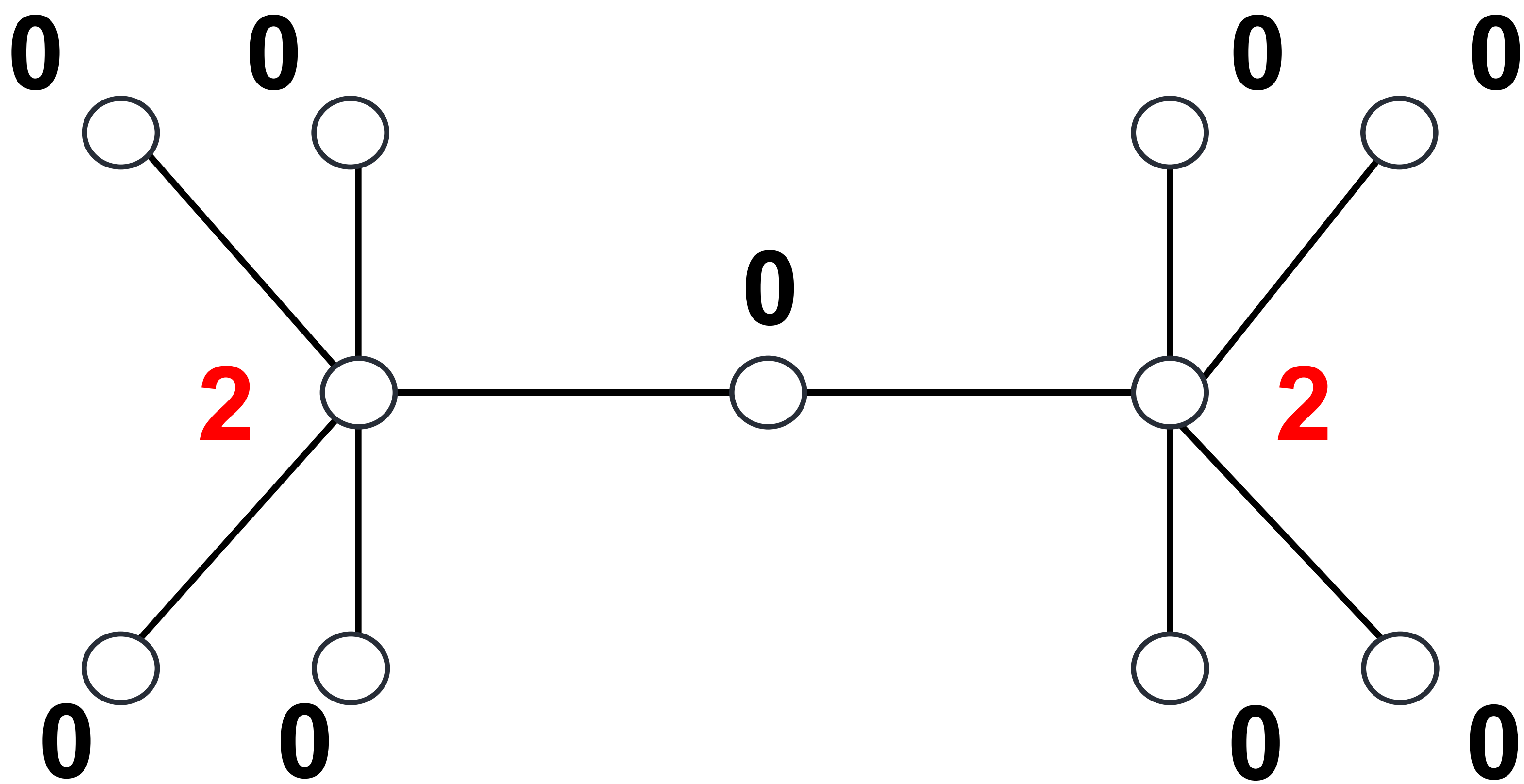
Decimos que *f* es una función de ***dominación romana fuerte*** en *G*, si cada vértice $u \in B_0$, tiene al menos un vecino $w \in B_2$ *tal que:*

$$f(w) \geq 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \left| N(w) \cap B_0 \right| \right\rceil$$

Variantes de la Dominación Romana

Dominación Romana fuerte

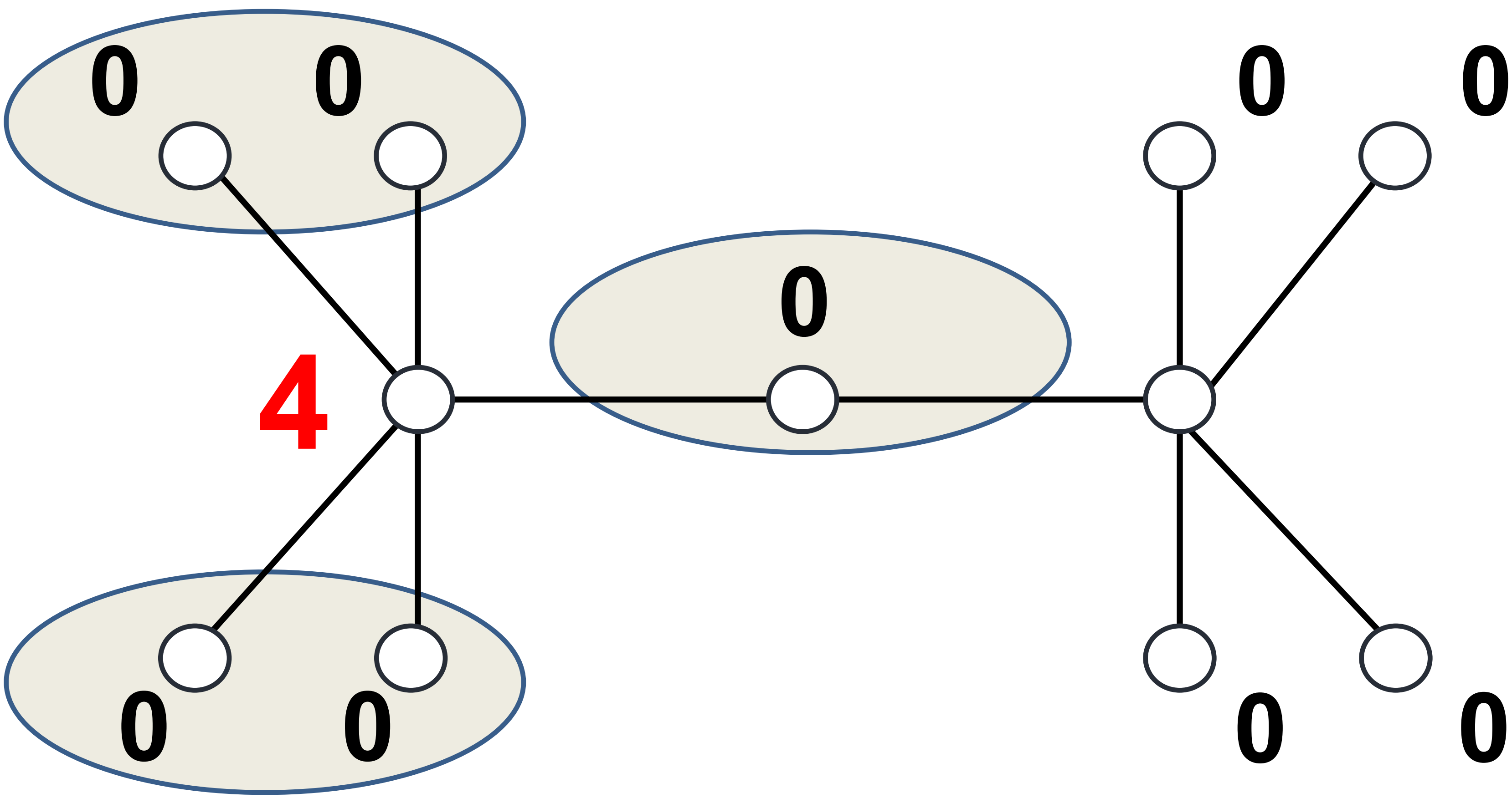
Motivación: ataque múltiple



Variantes de la Dominación Romana

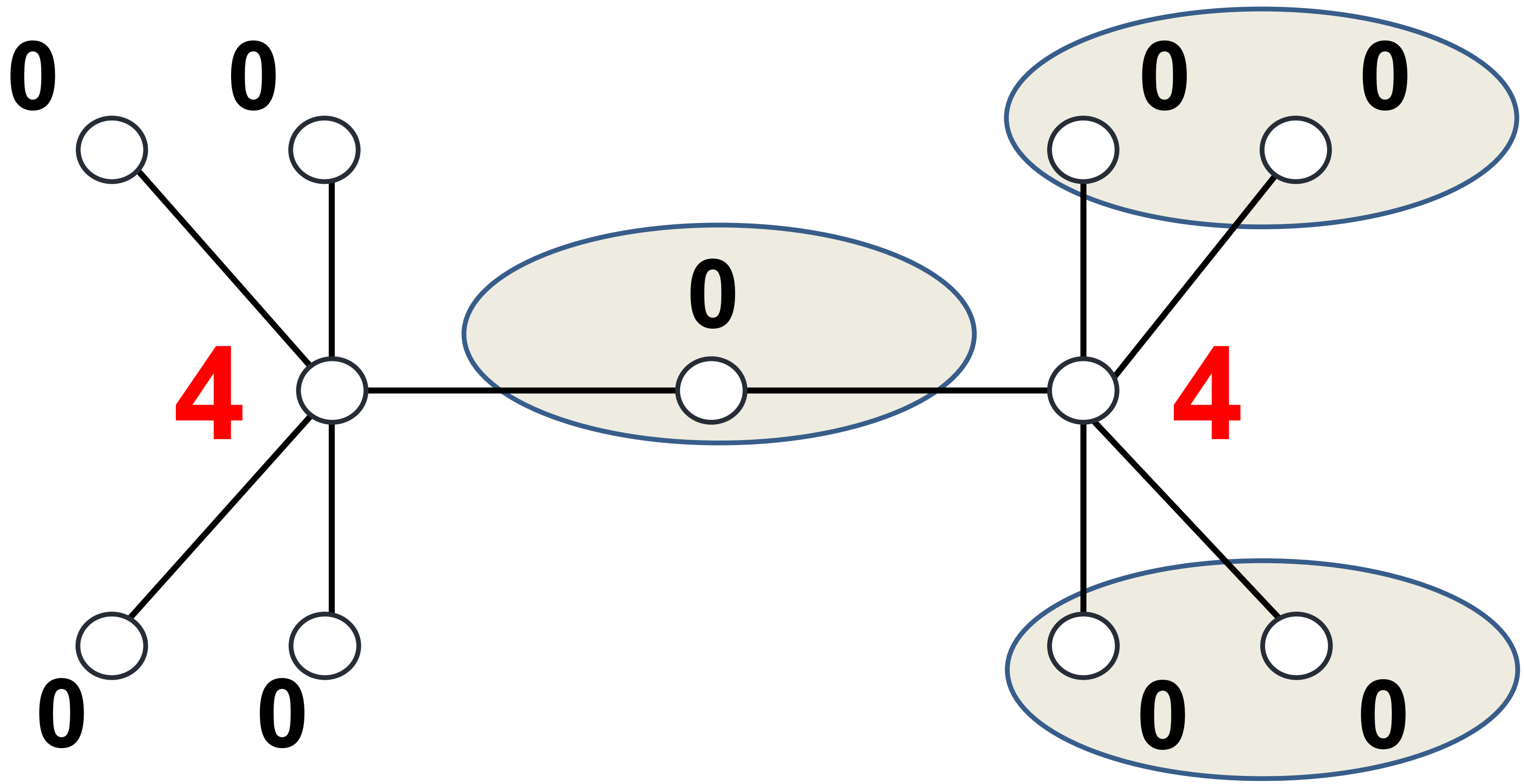
Dominación Romana fuerte

Motivación: ataque múltiple



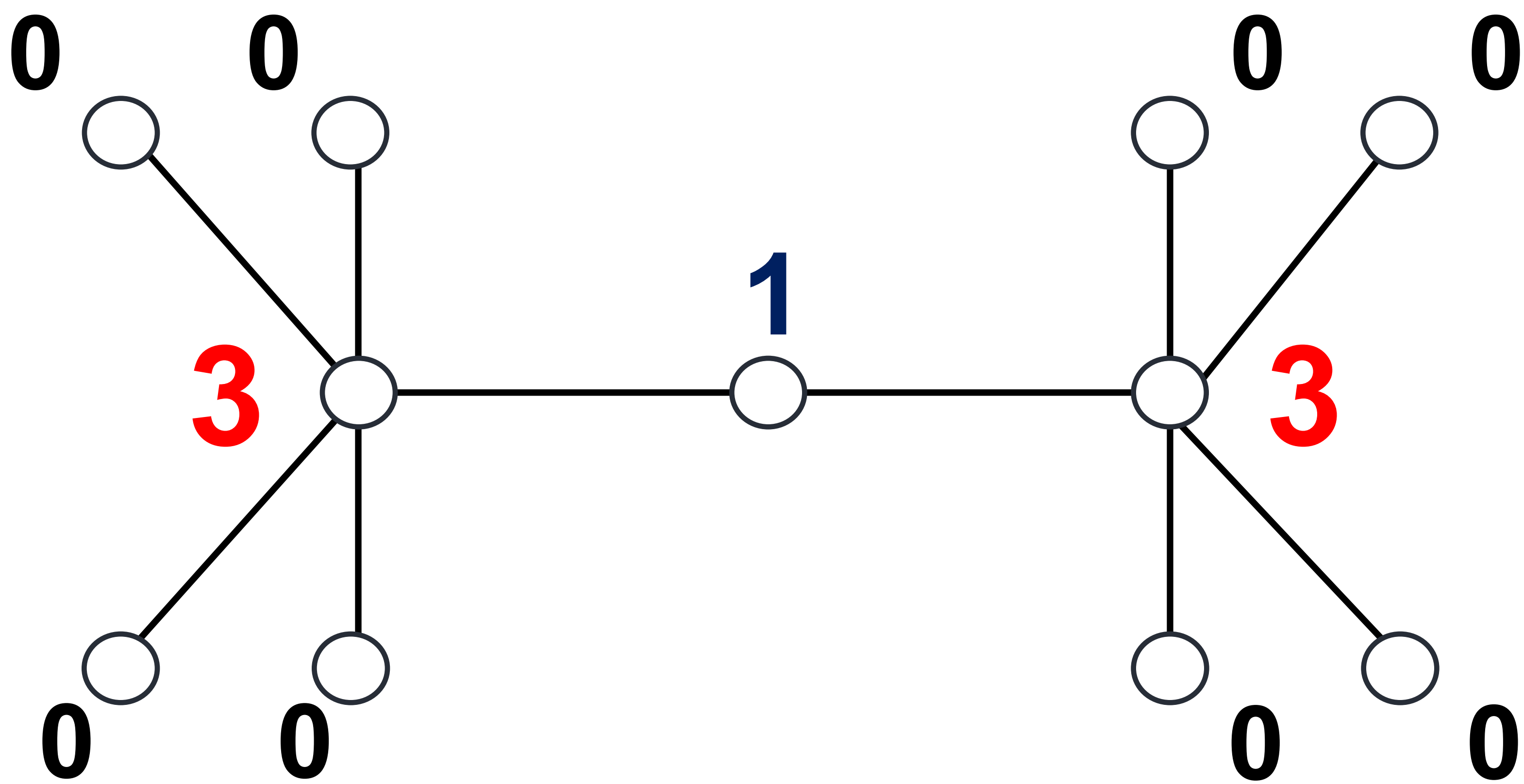
Variantes de la Dominación Romana

Dominación Romana fuerte *Motivación: ataque múltiple*



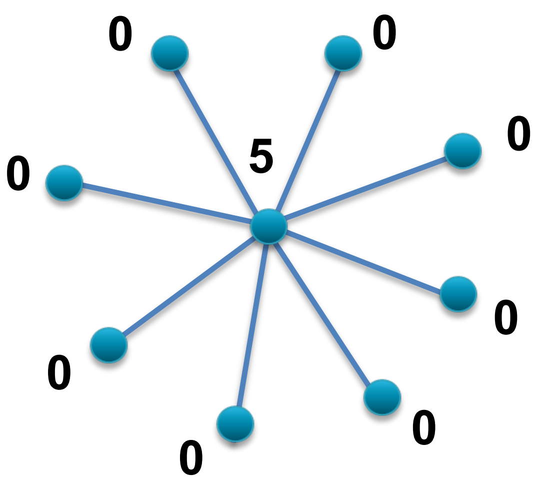
Variantes de la Dominación Romana

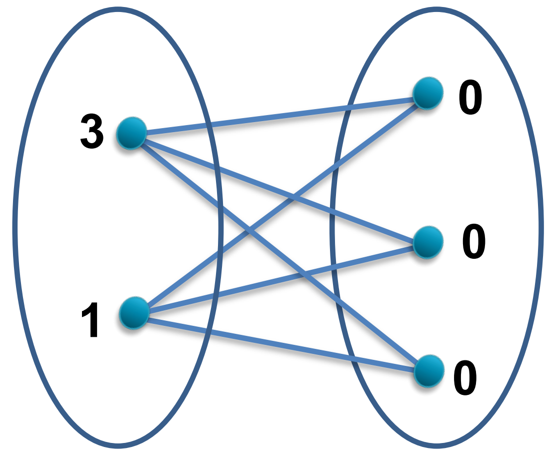
Dominación Romana fuerte *Motivación: ataque múltiple*



Variantes de la Dominación Romana

Dominación Romana fuerte



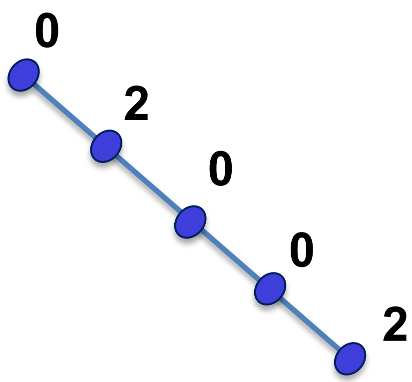


$$\gamma_{StR}(K_{1,n}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

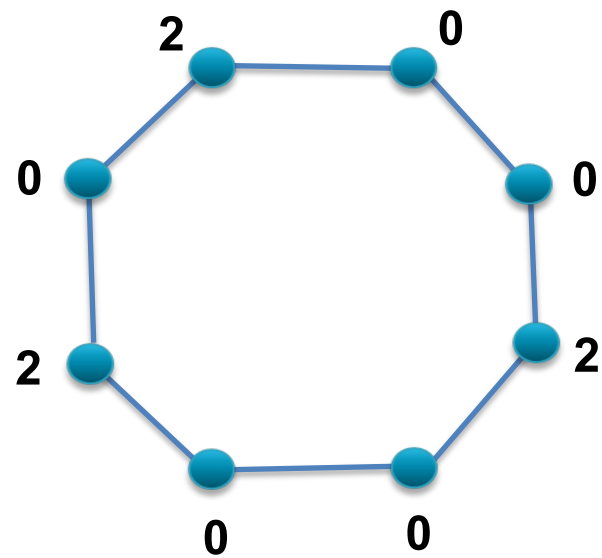
$$\gamma_{StR}(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + r$$

$$3 \leq r \leq s$$

Dominación Romana fuerte



$$\gamma_{StR}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$



$$\gamma_{StR}(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

Dominación Romana fuerte

Sea G un grafo de n vértices y grado máximo $\Delta(G)$, entonces

$$\gamma_{StR(G)} \leq n - \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor$$

$$\gamma_{StR(G)} \leq n - \left\lfloor \frac{1 + diam(G)}{3} \right\rfloor$$

$$\gamma_{StR(G)} \leq n - \left\lfloor \frac{g(G)}{3} \right\rfloor$$

$$\gamma_{StR(G)} \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Otras variantes estudiadas

- *Dominación romana mixta*
- *Dominacion romana total*
- *Dominacion romana contenida*
- *Dominacion romana maximal*
- *{k}-dominación romana (total)*

Propuestas posibles TFG

- *Estudio de parámetros en familias de grafos destacadas*
- *Estudio de parámetros en relación a operaciones con grafos*
- *Variantes de la dominación*
- *Estudio de algoritmos eficientes*

Universidad de Cádiz

GRACIAS

UCA
Universidad
de Cádiz